C.E.P.A. "ENRIQUE TIERNO GALVÁN"

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

PREPARACIÓN PARA EL ACCESO A CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

ÍNDICE DE TEMAS DE FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS:

TEMA 1: NÚMEROS REALES

1. INTRODUCCIÓN AL NÚMERO REAL.

1.1 Números naturales, enteros y racionales.

A los números que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío se los denomina **números naturales.** Designamos con N al conjunto de dichos números. N = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... }

Definimos al conjunto de los **números enteros** como $Z = N^{-} \cup \{0\} \cup N$ donde $N^{-} =$ {-1 , -2 , -3 , -4 , 5 , ...}, así:
Z = {…, - 4 , - 3 , - 2 , - 1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ….}
Los naturales se identifican con los enteros positivos, es decir N ⊂ Z

Llamamos **número racional** a todo número que se puede expresar como fracción $\frac{n}{m}$ donde n y m son enteros y m ≠ 0. Con Q denotamos la totalidad de los números racionales.

Todo número entero es racional, pues si $m \in Z$ escribimos $m = \frac{m}{1} \in Q$. Es decir Z ⊂ Q.

Todo número racional puede expresarse como número decimal exacto o periódico.

EJEMPLO

$\frac{1}{2}$ = 0,5	decimal exacto
$\frac{1}{3}$ = 0,333..... = $0,\overset{\frown}{3}$	decimal periódico puro de período 3
$\frac{86}{11}$ = 7,81818181... = $7,\overset{\frown}{81}$	decimal periódico puro de período 81
$\frac{29}{6}$ = 4,83333... = $4,8\overset{\frown}{3}$	decimal periódico mixto de período 3

2. NÚMEROS IRRACIONALES.

A los números que no se los puede expresar en forma de fracción, se los denomina **números irracionales**. Es decir, expresado en forma decimal no es exacto ni periódico. Se denotan por **I.**

EJEMPLOS

a) 0,1234567891011... La parte decimal de este número irracional es la sucesión de los números naturales.

b) $\pi \cong$ 3,141592654 Representa una aproximación del número irracional π. Notemos que también existen otras aproximaciones para este número; por ejemplo: 3,14; 3,141; 3,14159; 3,1416... etc.

c) $\sqrt{2} \cong$ 1,414213562

d) e $\cong$ 2,71

e) $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\cong$ 1,618033989 Número de oro o número áureo

f) $\sqrt[3]{3} \cong$ 1,4422

3. LOS NÚMEROS REALES.

La unión del conjunto Q de números racionales y el conjunto I de los números irracionales es el conjunto **R** de los **números reales**.

Es importante distinguir a qué conjunto pertenecen los números. En general es fácil, los problemas surgen con los números decimales. Podemos seguir el siguiente criterio para distinguirlos.

- Si son finitos (por tanto exactos) son racionales
- Si son infinitos
  - Pueden ser periódicos y por tanto son racionales
  - Pueden ser no periódicos y por tanto son irracionales

EJEMPLOS

a) $0{,}65$ es racional al ser finito

b) $0{,}7\widehat{3}$ es racional al ser infinito periódico

c) $0{,}12345.....$ es irracional al ser infinito no periódico

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

1. ¿Existe un número entero que sea menor o igual que todos los demás? y ¿mayor o igual que todos los demás?

2. ¿Cuántos enteros existen entre los números consecutivos 2 y 3? ¿y entre 5 y 6? ¿y entre *n* y *n* + 1?

3. ¿Existe un número racional que sea menor o igual que todos los demás? y ¿mayor o igual que todos los demás?

4. Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

$\frac{41}{13}$ $-\sqrt{49}$ $53,\widehat{7}$ $3,2 \cdot 10^{-6}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt[3]{7}$ 0’25 - 6 $\frac{12}{3}$

5. Indica el conjunto más pequeño N, Z, Q o I al que pertenecen los siguientes números:

4 $\frac{1}{4}$ 1’14444.... 0’5 -8’5678 1’313131... $\frac{2}{3}$ -4’34$\widehat{7}$

-5 $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ 1’$\widehat{5}$ $\frac{-7}{9}$ 2,123123123... $\sqrt{25}$ Π $\sqrt{3}$

6. Completa la siguiente tabla:

NÚMEROS	NATURAL	ENTERO	RACIONAL	IRRACIONAL	REAL	CONJUNTO MÁS PEQUEÑO AL QUE PERTENECE
11	SI	SI	SI	NO	SI	N
π						
$\sqrt[3]{-8}$						
$\frac{-12}{3}$						
0’75						
$\sqrt{25}$						
-6						
$\frac{-3}{4}$						
7						
Φ						
2’$\widehat{3}$						
-8						

4. ESTIMACIONES Y ERRORES.

Imagina que, como resultado de un cierto problema hemos obtenido en la calculadora 245’83190631, nosotros damos como resultado 245’83. Lo que hemos hecho ha sido dar una **aproximación** del número que teníamos en la calculadora.

Cuando se utilizan los números decimales para expresar mediciones concretas debe darse una cifra adecuada de decimales.

Se llaman cifras significativas aquellas con las que se expresa un número aproximado. Sólo se deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste.

Las estimaciones que hacemos en la vida corriente, sin ánimo de que sean muy precisas, tienen una o, a lo sumo, dos cifras significativas.

Una cantidad dada con tres cifras significativas afina mucho. Con cuatro estamos siendo extremadamente precisos. Sólo mediciones altamente científicas superan las cuatro cifras significativas.

EJEMPLOS

a) Sería absurdo decir que la capacidad de un pantano es 42.509.619 miles de litros. Es más razonable aproximar esa cantidad por 42.500 millones de litros o, mejor, 42’5 hm^3
b) Por mucho que afinemos los cálculos, no sería razonable decir que la altura de un árbol es 15’396 m. Es una valoración más sensata 15 m.

4.1. TIPOS DE APROXIMACIONES

Los dos tipos de aproximaciones más comunes son el redondeo y el truncamiento.

- Truncamiento de un número consiste en sustituir por ceros las cifras de las unidades inferiores a la que buscamos.
- Redondear un número consiste en dar la mejor de las aproximaciones, es decir, aquella con la que se comete menos error. Si el redondeo se efectúa con dos cifras decimales, tenemos que mirar la tercera cifra decimal. Si esta fuera menor que cinco, simplemente dejaremos las dos cifras decimales. Si la tercera cifra fuera mayor o igual que cinco, incrementaremos en una unidad la segunda cifra decimal.

EJEMPLOS

	Truncamiento	Redondeo
3,41**2**6…	3,41	3,41
2,45**7**6…	2,45	2,46
1,27**5**9…	1,27	1,28

4.2. ERRORES

Cuando damos un valor aproximado, estamos cometiendo un error que consiste en la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. A este error se le llama **error absoluto**. Su expresión matemática es:

$$E = |V - A|$$

Siendo E el error absoluto, V el valor exacto, A el valor aproximado y | | es el valor absoluto, es decir, el valor numérico obtenido despreciando el signo.

En general, el error absoluto es desconocido pero puede controlarse.

EJEMPLO

Cuando decimos que la altura de un árbol es 47 m aproximadamente, es posible que podamos asegurar que mide entre 46’5 m y 47’5 m. En este caso el error absoluto cometido sería menor que 0’5 m.

No es lo mismo decir que el error de medición es menor que 0'5 m cuando medimos la altura de un manzano, o la de un enorme ciprés. Por eso se define el **error relativo** que es el cociente entre el error absoluto y el valor real

$$E_R = \frac{E}{V}$$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

7. Tenemos 2 aproximaciones del número x = 6'23158, que son x'= 6'23 y x''= 6'24. Calcula el error absoluto y relativo cometido en ambas aproximaciones. ¿Cuál de ellas es mejor?

8. Se pesa en una balanza una muestra cuya masa es 4'9 g y se obtiene un valor de 5g. Con otra balanza se pesa otra muestra de 2kg y 100g obteniéndose un valor de 2kg y 25 g. Se pide:

a) Calcular el error absoluto y relativo en cada caso.
b) ¿Qué medida es de mayor calidad?

9. Al medir la masa de un objeto con una balanza obtenemos 2'3 kg. Si el error máximo que puede cometer la balanza es de 10 g ¿entre qué valores está comprendida su masa exacta?

10. Averigua con la calculadora el valor de $\sqrt{8}$ y completa:

Aproximación	Por redondeo	Por truncamiento
Con una cifra decimal		
Con dos cifras decimales		
Con tres cifras decimales		
Con cuatro cifras decimales		

5. NOTACIÓN CIENTÍFICA. CÁLCULOS CON CANTIDADES MUY PEQUEÑAS O MUY GRANDES.

Los números muy grandes (548000000000000000) o muy pequeños (0'0000000000254) son muy incómodos de escribir, leer e interpretar en su expresión decimal. Para trabajar con estos números se utiliza la **notación científica**.

Un número puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero.
- El resto de las cifras puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 y exponente n. Si n es positivo el número es grande y si n es negativo será pequeño.

EJEMPLO

$\underbrace{24800000000000}_{14\ Cifras} = 2'48 \cdot 10^{14}$ $\underbrace{0'000000000000000000}_{18\ ceros}7561 = 7'561 \cdot 10^{-18}$

5.1 CALCULADORA PARA LA NOTACIÓN CIENTÍFICA

Cuando la calculadora obtiene un resultado con más cifras de las que caben en su pantalla, recurre a la notación científica

EJEMPLO

123000000 · 45000 = 5.535^{12} que significa $5'535 \cdot 10^{12}$

$\frac{0'000123}{50000} = 2.46^{\ -09}$ que significa $2'46 \cdot 10^{-9}$

Para escribir en la calculadora $5,74 \cdot 10^9$ tecleamos: 5.74 EXP 9

Para poner $2'95 \cdot 10^{-13}$ marcamos: 2.95 EXP-13

No todas las calculadoras científicas son iguales. El orden de introducción de las órdenes puede cambiar.

Es importante dominar la propia calculadora. Para ello, lo mejor es leer las instrucciones que la acompañan y practicar.

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

11. Expresa con todas las cifras:
a) $6,25 \cdot 10^8$ b) $2,7 \cdot 10^{-4}$ c) $3 \cdot 10^{-6}$ d) $5,18 \cdot 10^{14}$
e) $3,215 \cdot 10^{-9}$ f) $-4 \cdot 10^{-7}$

12. Escribe en notación científica:
a) 4 230 000 000 b) 0,00000004 c) 84 300 d) –0,000572

13. Expresa en notación científica:
a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.
b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos: 5228,5 miles de millones.
c) Radio del átomo de oxígeno: 0,000000000066 m

14. Calcula con lápiz y papel y comprueba después el resultado con la calculadora:
a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (1,5 \cdot 10^7)$ b) $(3 \cdot 10^{-8}) \cdot (2,1 \cdot 10^4)$
c) $(1,25 \cdot 10^{-17}) \cdot (4 \cdot 10^{13})$ d) $(2,4 \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$

15. Efectúa y expresa el resultado en notación científica, utilizando la calculadora:
a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$
c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $(5 \cdot 10^9)^2$
e) $(4 \cdot 10^5)^{-2}$ f) $3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$

6. POTENCIAS Y RAÍCES.

6.1. POTENCIAS

Una **potencia** de base a y exponente n, es el producto de la base tantas veces como indica el exponente $a^n = \underbrace{a.a.a....a}_{n \text{ veces}}$

EJEMPLOS

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$

$1^{30} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots\ldots \cdot 1 = 1$

6.1.1. Propiedades

a) $a^0 = 1$ **y** $a^1 = a$

b) Producto de potencias con la misma base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

c) Potencia de una potencia

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

d) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ **y** $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$

e) Potencia de un producto

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

f) Cociente de potencias con la misma base

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

g) Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

h) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

6.2. RADICALES

Se llama **raíz n-ésima de un número a**, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad si \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama radical
n se denomina índice de la raíz
a es el radicando

EJEMPLOS

a) $\sqrt{1} = \pm 1$ porque $1^2 = 1$ y $(-1)^2 = 1$
b) $\sqrt{-1}$ no existe porque no hay ningún número que al elevarlo al cuadrado nos de –1.
c) $\sqrt{4} = \pm 2$ porque $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$
d) $\sqrt{-4}$ no existe porque no hay ningún número que al elevarlo al cuadrado nos de –4.
e) $\sqrt{9} = \pm 3$ porque $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$
f) $\sqrt{-9}$ no existe porque no hay ningún número que al elevarlo al cuadrado nos de –9.
g) $\sqrt{16} = \pm 4$ porque $4^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$
h) $\sqrt[3]{1} = 1$ porque $1^3 = 1$
i) $\sqrt[3]{-1}$ = -1, porque $(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$
j) $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
k) $\sqrt[3]{-8}$ = -2, porque $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$
l) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ porque $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$
m) $\sqrt[4]{-16}$ no existe porque no hay ningún número que al elevarlo a la cuarta nos de –16.

6.2.1 ALGUNAS PECULIARIDADES DE LAS RAÍCES

1) Si el radicando es positivo o igual a cero, existe su raíz cualquiera que sea su índice:

Si a$\geq$ 0, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n

2) Si el radicando es negativo, sólo existen sus raíces de índice impar:

Si a<0, $\sqrt[n]{a}$ existe sólo si n es impar.

EJEMPLOS

a) $\sqrt[3]{-27}$ = -3 pues $(-3)^3 = -27$

c) $\sqrt{-25}$ No existe porque no podemos encontrar ningún número que al elevarlo al cuadrado nos dé un resultado negativo.

3) La raíz de un índice par de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo.

EJEMPLO

$$\sqrt{4} = \begin{Bmatrix} 2 \Rightarrow 2^2 = 4 \\ -2 \Rightarrow (-2)^2 = 4 \end{Bmatrix}$$

6.2.2 FORMA EXPONENCIAL DE LOS RADICALES

Los radicales se pueden expresar como potencias de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

EJEMPLOS

a) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$

c) $\sqrt[6]{7^2} = 7^{\frac{2}{6}} = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$

6.2.3 PROPIEDADES DE LOS RADICALES

Los radicales tienen una serie de propiedades que debemos conocer y utilizar con soltura.

Todas ellas se deducen de las propiedades de las potencias. Las más importantes son:

a) $\sqrt[n]{a^n} = a$

b) $\sqrt[n\cdot p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

APLICACIONES

i) Esta propiedad sirve para **simplificar** radicales. Por ejemplo:

1) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$

Lo primero que hacemos es descomponer factorialmente el radicando. En este ejemplo $25 = 5^2$

Después, calculamos el máximo común divisor del índice y exponente del radicando. En nuestro ejemplo: m.c.d.(4,2)=2

Simplificamos dividiendo el índice y el radicando entre el m.c.d. obtenido.

2) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

ii) También, hacemos uso de esta propiedad para **reducir radicales a índice común**. Por ejemplo, para poder comparar radicales y decidir cuál de ellos es el mayor o el menor, es necesario que todos ellos tengan el mismo índice.

Si nos preguntan: ¿Qué radical es mayor, $\sqrt{32}$ ó $\sqrt[3]{81}$?

A priori no podemos decidirlo pues ambos radicales tienen distinto índice. Utilizando la propiedad que acabamos de ver podemos conseguir el mismo índice para ambos radicales de la siguiente manera:

- Calculamos el mínimo común múltiplo de los índices, m.c.m. (2,3)= 6. Éste será el índice común.
- Dividimos el m.c.m. entre cada uno de los índices y el resultado obtenido será el exponente al que debemos elevar cada radicando.

$$\sqrt{32} = \sqrt[6]{32^3} = \sqrt[6]{32768}$$
$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[6]{81^2} = \sqrt[6]{6561}$$

Podemos decir que: $\sqrt{32} > \sqrt[3]{81}$

c) PRODUCTO DE RADICALES

Para poder multiplicar radicales es necesario que éstos tengan el mismo índice. En este caso, podemos expresar el producto de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

EJEMPLO

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

- Si tenemos dos radicales con igual índice, el producto se hace directamente.
- En caso contrario, si no lo tuvieran, tendríamos que reducir dichos radicales a índice común como hemos visto en la propiedad anterior, y después, efectuaríamos el producto.

APLICACIONES

i) Sacar un factor fuera de la raíz:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}.$$

ii) Agrupar el producto de varios radicales en un solo radical:

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{5 \cdot 3^2} = 3\sqrt{5}$$

d) DIVISIÓN DE RADICALES

Para dividir radicales, al igual que el producto, es necesario que tengan el mismo índice. En este caso, podemos expresar la división de la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

EJEMPLO

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$$

APLICACIONES

Junto con las propiedades anteriores, sirve para poder reducir expresiones complejas a expresiones más sencillas.

EJEMPLO

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3\cdot 4^2}}{\sqrt[6]{2^3\cdot 3}} = \frac{\sqrt[6]{3^3\cdot 2^4}}{\sqrt[6]{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{3^2\cdot 2} = \sqrt[6]{18}$$

m.c.m (2, 3, 6) = 6 Factorizamos los radicandos Simplificamos

e) POTENCIA DE UN RADICAL

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

EJEMPLO

$$(\sqrt[5]{4})^3 = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{(2^2)^3} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$$

f) RAÍZ DE RAÍZ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

EJEMPLO

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = \sqrt[12]{3}$$

g) SUMA DE RADICALES

Para poder sumar radicales deben darse dos condiciones:

1) Que los radicales tengan el mismo índice

2) Que los radicales tengan el mismo radicando

Es decir, sólo pueden sumarse radicales idénticos.

EJEMPLOS

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ Esto es una suma de radicales que tienen el mismo índice pero distinto radicando. Esta suma sólo puede realizarse de forma aproximada utilizando la calculadora, o bien, se deja la suma así indicada.

b) $\sqrt{10}+\sqrt[3]{10}$ Esto es una suma de radicales que tienen igual radicando pero distinto índice. La suma sólo puede realizarse de forma aproximada.

c) En cambio, sí podemos calcular el valor de:

$$5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = (5+2-10)\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

Hay casos en los que a priori podemos pensar que la suma no puede realizarse, pero simplificando los radicales puede suceder que la suma sea posible:

EJEMPLOS

1) $2\sqrt{18} - 5\sqrt{50} + 3\sqrt{8} = 2\sqrt{2\cdot 3^2} - 5\sqrt{2\cdot 5^2} + 3\sqrt{2^3} = 2\cdot 3\sqrt{2} - 5\cdot 5\sqrt{2} + 3\cdot 2\sqrt{2} =$
$= 6\sqrt{2} - 25\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = -13\sqrt{2}$

2) $18\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[6]{16} = 18\sqrt[6]{4^2} - 8\sqrt[6]{16} = 18\sqrt[6]{16} - 8\sqrt[6]{16} = 10\sqrt[6]{16} = 10\sqrt[6]{2^4} =$
$= 10\sqrt[3]{2^2} = 10\sqrt[3]{4}$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

16. Calcula expresando el resultado en forma de potencia:

a) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 =$	b) $(3 \cdot 4 \cdot 5)^2 =$	c) $9^{-5} =$
d) $\left(\frac{-5}{4}\right)^3 =$	e) $8^7 : 8^5 =$	f) $(-5)^0 =$
g) $6 \cdot 6^2 \cdot 6^3 =$	h) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) =$	i) $3^{-2} =$
j) $10^{-3} =$	k) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$	l) $((-9)^3)^5 =$
m) $10^0 =$	n) $\frac{1}{(10)^{-6}} =$	ñ) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-1} =$

17. Calcula las siguientes raíces sin utilizar la calculadora:

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[5]{1}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt{0}$

g) $\sqrt[4]{81}$ h) $\sqrt[3]{216}$ i) $\sqrt[3]{-125}$ j) $\sqrt{36}$ k) $\sqrt{-49}$ l) $\sqrt[5]{-32}$

18. Expresa de forma exponencial los siguientes radicales simplificando cuando sea posible:

a) $\sqrt{x^6}$ b) $\sqrt[15]{a^6}$ c) $\sqrt[3]{x^9}$ d) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$ e) $\sqrt[n]{a^k}$

19. Expresa en forma radical y calcula el resultado:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{1}{4}}$ d) $8^{\frac{2}{3}}$ e) $64^{\frac{5}{6}}$

20. Expresa en forma radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5)^{\frac{1}{3}}$ c) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$ d) $\left[(x^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{5}}$ e) $(m^5 \cdot n^5)^{\frac{1}{3}}$

21. Simplifica:

a) $\sqrt[15]{x^{12}}$ b) $\sqrt[16]{y^8}$ c) $\sqrt[25]{z^{20}}$ d) $\sqrt[6]{16}$ e) $\sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt[6]{243}$

22. ¿Cuál de los dos números es mayor en cada caso?

a) $\sqrt[4]{81}$ ó $\sqrt[3]{13}$

b) $\sqrt[3]{51}$ ó $\sqrt[9]{132650}$

c) $\sqrt[3]{3}$ ó $\sqrt{2}$

23. Expresa los productos de los siguientes radicales en un único radical, y extrae después todos los factores que puedas:

a) $\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{2} =$

b) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3} =$

c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[6]{25} =$

24. Saca del radical todos los factores que sea posible:

a) $\sqrt[4]{32x^5}$ c) $\sqrt[6]{128}$ e) $\sqrt[5]{100000x^7y^{25}z^{11}}$

b) $\sqrt[4]{243a^4b^5c^6}$ d) $\sqrt[10]{(a^2 \cdot b^5)^3}$

25. Expresa los siguientes radicales en un único radical, y simplifica el resultado siempre que sea posible:

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[6]{30}}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[4]{14}}$

26. Efectúa las siguientes sumas:

a) a) $\sqrt{18}-\sqrt{50}-\sqrt{2}+\sqrt{8}=$

b) $\sqrt{20}+5\sqrt{3}-3\sqrt{5}+2\sqrt{75}=$

c) $2\sqrt{7}+\sqrt{12}-5\sqrt{3}+\sqrt{63}=$

d) $\sqrt{24}-\sqrt{150}-\sqrt{32}+\sqrt{216}-\sqrt{200}=$

e) $4\sqrt{12}-3\sqrt{125}+\sqrt{500}+\sqrt{300}=$

f) $\sqrt{125}-3\sqrt{80}-4\sqrt{45}+10\sqrt{180}=$

g) $\sqrt{28}+5\sqrt{63}-2\sqrt{175}-\sqrt{343}=$

h) $\sqrt{50}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{\sqrt{32}}{5}-\sqrt{72}=$

i) $2\sqrt{12}-\dfrac{4\sqrt{75}}{3}+\sqrt{243}-\dfrac{5\sqrt{48}}{4}+\dfrac{\sqrt{27}}{2}=$

j) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a^3}+\sqrt{72a}=$

27. Simplifica:

a) $(\sqrt[5]{a^4})^6=$

b) $(\sqrt{y})^4\cdot\sqrt[4]{y}=$

c) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8=$

d) $5\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}}}}=$

e) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{16}}}}\right)^{12}=$

28. Calcular:

a) $(2a)^3=$

b) $(a^2\cdot a)^{-4}=$

c) $\left(\dfrac{a}{2b}\right)^{-3}=$

29. Razona si es correcta o no la igualdad: $\mathbf{3^2+3^4=3^6}$

30. Hallar el valor de:

a) $16^{\frac{3}{4}}=$

b) $8^{\frac{2}{3}}=$

c) $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{\frac{-3}{4}}=$

d) $\left(\dfrac{32}{243}\right)^{\frac{7}{5}}=$

e) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}=$

f) $(-27)^{\frac{1}{3}}=$

g) $\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}=$

h) $\left(\dfrac{-343}{3375}\right)^{\frac{1}{3}}=$

i) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{-1}{3}}=$

31. Expresa en forma exponencial, y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\sqrt{x} =$

b) $\sqrt[3]{a^2 \cdot a^5} =$

c) $(\sqrt[10]{4^5})^3 =$

d) $(\sqrt[5]{a})^{-4} =$

e) $\sqrt[12]{a^4} =$

f) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}\right)^8 =$

g) $\left(\sqrt[8]{\dfrac{7^5}{3^4}}\right)^{-2} =$

e) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{5^4}{5^2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

32. Expresa como una raíz, y simplifica el resultado siempre que sea posible:

a) $16^{\frac{1}{2}} =$

b) $(a^6)^{\frac{1}{18}} =$

c) $(x^{-2})^{\frac{5}{7}} =$

d) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} =$

e) $a \cdot a^{\frac{1}{5}} =$

f) $\left(5^{\frac{-4}{5}}\right)^{\frac{-10}{3}} =$

g) $\left(a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} =$

h) $(5^5 \cdot 5^{-3})^{\frac{1}{4}} =$

33. Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{125} =$

b) $\sqrt[4]{10000} =$

c) $\sqrt[8]{256} =$

d) $\sqrt[4]{-10000} =$

e) $\sqrt[8]{-256} =$

34. Hallar el resultado de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[5]{32}$ d) $\sqrt{-16}$

35. Multiplica los siguientes radicales y simplifica al máximo el resultado:

a) $\sqrt{4a} \cdot \sqrt{6a} \cdot \sqrt{15a^2} =$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot 3\sqrt{b^5} \cdot \sqrt[3]{b^2} =$

c) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{10ab} \cdot \sqrt{8a^3b} \cdot \sqrt{a} =$

36. Realiza los siguientes productos de radicales, reduciéndolos antes a índice común:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} =$

b) $\sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[4]{3^3} =$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[8]{7^{-2}} \cdot \sqrt[4]{11^{\frac{3}{2}}} =$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt[8]{3^4} =$

37. Calcular el siguiente cociente, expresándolo mediante un único radical:

$$\frac{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{125}} =$$

7. EXPONENCIACIÓN Y LOGARITMIZACIÓN.

Al resolver la ecuación 2x = 6, la solución es x = 3.

Si intentamos resolver $2^x = 8$, intuiremos fácilmente que el número buscado es x = 3. Se trata de una ecuación exponencial, al llevar la x en el exponente de la potencia.

Si trabajamos con otros ejemplos de potencias como $2^x = 4$, encontramos que x = 2. Sin embargo, para $2^x = 6{,}964..$ no resulta fácil obtener el valor de la x.

Para casos así necesitamos introducir un concepto nuevo que nos ayude a resolver este tipo de ecuaciones: **los logaritmos**.

Cualquier número se puede expresar como potencia de otro. Eligiendo adecuadamente x, todo número real positivo puede escribirse en la forma **a**$^{\mathbf{x}}$ siendo la base un número positivo distinto de 1. Evidentemente, **a** (la base) no puede ser 1 ya que $1^x = 1$

Si $a > 0$ y $a \neq 0$, se llama logaritmo en base **a** de **p**, y se designa $\log_a p$, al exponente al que hay que elevar **a** para obtener **p**

$$\log_a p = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = p$$

EJEMPLOS

a) $\log_5 25 = x$; buscamos x tal que $5^x = 25$, por tanto x=2 y $\log_5 25 = 2$

b) $\log_3 9 = 2$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; ya que $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

d) $\log_{10} 10000 = 4$

7.1 CONSECUENCIAS INMEDIATAS

a) $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$

b) Logaritmo de la base es siempre 1; $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$

c) Sólo tienen logaritmos los números positivos

7.2 PROPIEDADES

a) Logaritmo de un producto $\log_a M + \log_a Q = \log_a (M \cdot Q)$

b) Logaritmo de un cociente $\log_a M - \log_a Q = \log_a \frac{M}{Q}$

c) Logaritmo de una potencia $\log_a M^n = n \log_a M$

7.3 OPERACIONES CON LOGARITMOS

Cuando no se indica la base en un logaritmo se supone que es 10, y se llama logaritmo decimal.

En tu calculadora vas a encontrar una tecla que dice **log.** Esta tecla halla automáticamente el logaritmo en base diez.

7.4 CAMBIO DE BASE

$$\log_2 N = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = N$$

Aplicamos logaritmos en los dos lados:

$$\log 2^x = \log N$$

Utilizando las propiedades:

$$x \log 2 = \log N$$

$$x = \frac{\log N}{\log 2}$$

Luego:

$$\log_2 N = \frac{\log N}{\log 2}$$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

38. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_4 16$

b) $\log_2 32$

c) $\log_{10} 1000000$

d) $\log_5 125$

e) $\log_3 729$

f) $\log_{12} 144$

39. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 16$

b) $\log_8 1$

c) $\log_5 25$

d) $\log_2 0{,}5$

e) $\log_2 0{,}25$

f) $\log 1000$

g) $\log_6 216$

h) $\log_3 243$

40. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 \frac{1}{9}$

b) $\log_3 \sqrt{27}$

c) $\log_3 \sqrt[3]{3}$

d) $\log \frac{1}{100}$

e) $\log \sqrt{10}$

f) $\log 0{,}000001$

g) $\log_{10} \sqrt[5]{0{,}01}$

41. Hallar las bases.

a) $\log_x 10000 = 2$

b) $\log_x 16 = 2$

c) $\log_x 125 = \frac{3}{2}$

d) $\log_x \sqrt[5]{x^2}$

42. Efectúa el cambio de base:

a) $\log_2 5$

b) $\log_3 2$

c) $\log_3 7$

d) $\log_5 24$

43. Reduce las siguientes expresiones todo lo que puedas:

a) $\log 5 - \log 500 =$

b) $2\log 3 - \log 9 =$

c) $\log 2500 - 2\log 5 =$

d) $\log 25 - 3\log \frac{1}{5} =$

e) $\log 75 - 2\log 3 + \log 15 =$

TEMA 2: PROPORCIONALIDAD.

1. PROPORCIONALIDAD

1.1 RAZONES Y PROPORCIONES

La **razón** entre dos números a y b es el cociente entre ellos: $\frac{a}{b}$

La razón entre 10 y 2 es 5, ya que $\frac{10}{2}$ = 5.

1.2 PROPORCIÓN NUMÉRICA

Proporción numérica es la igualdad de dos razones. Los números **a, b, c y d** forman una **proporción** si la razón entre a y b es la misma que la razón entre c y d: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Para comprobar si dos razones forman o no proporción, se multiplican sus términos en cruz:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Si los productos dan el mismo resultado, decimos que esas dos razones forman proporción.

La **proporción** se lee: **a** es a **b** como **c** es a **d**.

Los números 2, 5, 8 y 20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

Lo comprobamos: $2 \cdot 20 = 40$
$5 \cdot 8 = 40$

La proporción se lee: 2 es a 5 como 8 es a 20.

En la proporción anterior: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ a los números 2 y 20 se les llama **extremos** y a los números 5 y 8 se les llama **medios.**

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES:
El producto de extremos es igual al producto de medios

Cuando en una proporción conocemos tres de sus términos y desconocemos uno, al término desconocido le llamamos **cuarto proporcional.**

2. MAGNITUDES PROPORCIONALES:

Son aquellas que guardan una relación de dependencia entre sí.

EJEMPLOS

El tiempo y la velocidad de un móvil: si varía la velocidad del móvil varía el tiempo empleado.

El espacio y la velocidad de un móvil: si varía la velocidad, varía el espacio recorrido en un tiempo determinado.

Las magnitudes proporcionales pueden serlo directa o inversamente.

2.1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES:

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número la correspondiente en la otra queda multiplicada por ese número y si la primera se divide la correspondiente queda dividida en la misma proporción.

Puede resultar más fácil comprobar si dos magnitudes son directamente proporcionales comprobar que al aumentar una la otra también aumenta, y al disminuir una la otra también disminuye.

2.2. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número la correspondiente en la otra queda dividida por el mismo número y si la primera se divide la correspondiente queda multiplicada en la misma proporción.

Como en el caso anterior, puede resultar más fácil comprobar que dos magnitudes proporcionales lo son inversamente, comprobando que cuando una aumenta la otra disminuye y viceversa.

EJEMPLOS:

El espacio y la velocidad de un móvil: para recorrer **MÁS** espacio (en el mismo tiempo) es preciso **MÁS** velocidad. **DIRECTAMENTE PROPORCIONALES**.
El tiempo y la velocidad de un móvil: para tardar **MENOS** tiempo (en el mismo espacio) es preciso **MÁS** velocidad. **INVERSAMENTE PROPORCIONALES**.

3. REGLA DE TRES SIMPLE

Es la que nos enseña a resolver problemas en los que interviene una proporción de la que conocemos tres de los cuatro números y nos permite calcular el cuarto.

3.1. REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA:

Si las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales, la regla de tres simple la resolvemos:

a __________ c
b __________ x

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ $\qquad x = \frac{b \cdot c}{a}$ Donde x es el término desconocido y a, b, c los términos conocidos.

EJEMPLO

En el mercadillo venden 5 kg de fruta por 6 €. ¿Cuántos € nos cobrarán si compramos 30 Kg?

Sabemos Si por 5 kg cobran 6 €

Nos preguntan Por 30 Kg cobrarán x

$$\frac{5}{30} = \frac{6}{x} \qquad x = \frac{6 \cdot 30}{5} = 36 \text{ €}$$

En este caso las magnitudes número de Kg de fruta y valor en € son **directamente** proporcionales. Es una **regla de tres simple directa.**

EJEMPLO

Alberto recibe 1.250 € por 25 días de trabajo. ¿Cuánto recibirá por 8 días de trabajo?

25 días ________recibe______ 1.250 €
8 días _________recibe______ ***x***

Como la cantidad que recibe es directamente proporcional a los días trabajados (por trabajar **menos** días recibirá **menos** dinero) se escribe la proporción:

$$\frac{25}{8} = \frac{1250}{x} \Longrightarrow 25\,x = 10000 \Longrightarrow x = \frac{10000}{25} = 400 \text{ €}$$

3.2. REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA:

Si las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales, la regla de tres simple la resolvemos:

a _________ c
b _________ x

$\frac{b}{a} = \frac{c}{x}$ $\qquad x = \frac{a \cdot c}{b}$ Donde x es el término desconocido y a, b, c los términos conocidos.

EJEMPLO

Un coche lleva una velocidad constante de 90 km por hora y tarda en hacer un trayecto 4 horas. ¿Cuánto tiempo tarda si la velocidad es de 120 km por hora?

90 km/h _________ 4 horas
120 km/h ________ ***x***

Como la velocidad es inversamente proporcional al tiempo (a **más** velocidad se emplea **menos** tiempo), se escribe la proporción:

$$\frac{120}{90} = \frac{4}{x} \Longrightarrow 120\,x = 360 \Longrightarrow x = \frac{360}{120} = 3 \text{ horas}$$

SI EL COCHE LLEVA UNA VELOCIDAD DE 120 KM/H, TARDA 3 HORAS

EJEMPLO

Si 3 trabajadores necesitan 18 días para hacer un trabajo. ¿Cuántos días invertirán en hacer el mismo trabajo 6 obreros?

3 trabajadores _________ 18 días
6 trabajadores _________ x días

Las magnitudes número de trabajadores y número de días que tardan son **inversamente** proporcionales. **Más** trabajadores tardarán **menos** días. Es una **regla de tres inversa.** Por tanto, planteamos la proporción:

$$\frac{6}{3} = \frac{18}{x} \Longrightarrow x = \frac{18 \cdot 3}{6} = 9 \text{ días.}$$

3.3. REGLA DE TRES COMPUESTA

Es la aplicación de varias reglas de tres simples, que pueden ser directas o inversas.

¿Cómo procedemos?

Relacionamos cada una de las cantidades con la cantidad de la incógnita, considerando que las demás cantidades son constantes, a fin de analizar si las relaciones son directas o inversamente proporcionales.

EJEMPLO

En una fábrica de automóviles 8 máquinas iguales producen 3600 tornillos en 3 horas. ¿Cuántos tornillos producen 5 máquinas iguales en 2 horas?

D	D	
8 máquinas ______	3 horas ________	3600 tornillos
5 máquinas ______	2 horas ________	**x** tornillos

El número de tornillos es directamente proporcional al número de máquinas y al número de horas, luego se escribe la proporción:

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3.600}{x} \longrightarrow \frac{24}{10} = \frac{3.600}{x}$$

$$x = 3.600 \cdot \frac{10}{24} = 1.500 \text{ tornillos}$$

LAS 5 MAQUINAS PRODUCEN EN 2 HORAS 1500 TORNILLOS

EJEMPLO

Si 8 obreros, trabajando a razón de 6 horas diarias, tardan 9 días en hacer un muro de 30 m de largo, ¿cuántos días tardarán 10 obreros que trabajan 8 horas diarias en construir otro muro de 50 m de longitud?

I	I	D	
8 obreros _______	6 h. _______	30 m ______	9 días
10 obreros _______	8 h. _______	50 m ______	x días

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{30}{50} = \frac{9}{x} \Longrightarrow \frac{10 \cdot 8 \cdot 30}{8 \cdot 6 \cdot 50} = \frac{9}{x} \Longrightarrow x = \frac{21.600}{2.400} = 9 \text{ días}$$

4. REPARTOS PROPORCIONALES

Igual que la regla de tres los repartos pueden ser **directa o inversamente** proporcionales:

4.1. REPARTO DIRECTAMENTE PROPORCIONAL.

EJEMPLO

Entre tres personas de una clase de adultos compran una participación de lotería de 9 €. Laura pone 4 €, José pone 3 € y María 2 €. Este décimo resulta premiado con 13.500 €. ¿Cuánto cobrará cada uno?

Para hacer el reparto proporcional:

1º) Se suman las cantidades aportadas a las que van a repartir el premio cobrado: 4 + 3 + 2 = 9.

2º) Se escriben las siguientes proporciones:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Laura cobrará: a}\\ \text{José cobrará: b}\\ \text{María cobrará: c}\end{array}\right\} \qquad \frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = \frac{13.500}{9}$$

3º) Se calcula el valor de a, b y c:

a = $\frac{13.500 \bullet 4}{9}$ = 6.000 € cobrará Laura.

b = $\frac{13.500 \bullet 3}{9}$ = 4.500 € cobrará José.

c = $\frac{13.500 \bullet 2}{9}$ = 3.000 € cobrará María.

EJEMPLO

Para repartir un número, por ejemplo 18.000, en partes directamente proporcionales a varios números, por ejemplo 3, 5 y 8, se siguen estos pasos:

1º) Se calcula la suma de los números 3, 5 y 8:
3 + 5 + 8 = 16

2º) Se escriben las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = \frac{18.000}{16}$$

3º) Se calcula el valor de a, b y c:

$\frac{a}{3} = \frac{18000}{16}$ a = $\frac{18000 \bullet 3}{16}$ = 3.375

$\frac{b}{5} = \frac{18000}{16}$ b = $\frac{18000 \bullet 5}{16}$ =5.625

$\frac{c}{8} = \frac{18000}{16}$ c = $\frac{18000 \bullet 8}{16}$ = 9.000

4.2. REPARTO INVERSAMENTE PROPORCIONAL:

EJEMPLO

Entre tres pueblos deciden hacer una pista polideportiva que cuesta 300.000 €. Llegan a un acuerdo para pagarla en cantidades inversamente proporcionales a sus respectivas distancias a la pista: el municipio A está a 2 Km de distancia; el B a 4 Km y el C está a 12 Km. ¿Cuánto pagará cada pueblo?

Según el acuerdo, las cantidades que pagarán serán inversamente proporcionales a las distancias; cuanto más lejos, menos pagan y viceversa.

El **reparto inversamente proporcional** a 2, 4 y 12 es igual que el reparto directamente proporcional a los inversos de estos números; $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{12}$. Es decir, el reparto será proporcional a:

Municipio A: $\frac{1}{2}$

Municipio B: $\frac{1}{4}$

Municipio C: $\frac{1}{12}$

1º) Se suman estos inversos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{10}{12}$$

m.c.m. (2, 4, 12) = 12

2º) Aprovechamos las fracciones equivalentes con el mismo denominador para hacer el cálculo del reparto más sencillo:

Municipio A: $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$

Municipio B: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

Municipio C: $\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

Repartiremos de manera directamente proporcional a los numeradores de las fracciones obtenidas:

Municipio A: 6
Municipio B: 3
Municipio C: 1

3º) A partir de aquí procederemos como en el reparto directamente proporcional:

- Se suman los números: 6 + 3 + 1 = 10
- Se escriben las proporciones:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{1} = \frac{300.000}{10}$$

- Se calculan los valores de a, b y c:

$$a = \frac{300.000 \bullet 6}{10} = 180.000 \text{ €}$$

$$b = \frac{300.000 \bullet 3}{10} = 90.000 \text{ €}$$

$$c = \frac{300.000 \bullet 1}{10} = 30.000 \text{ €}$$

El municipio A tendrá que pagar 180.000 €.
El municipio B tendrá que pagar 90.000 €.
El municipio C tendrá que pagar 30.000 €.

Observamos que el municipio A tiene que pagar el doble que el B porque está a mitad de distancia.
Así mismo, el B tiene que pagar el triple que el C porque está a la tercera parte de distancia.
Se cumple la condición de proporcionalidad inversa.

EJEMPLO

Para repartir un numero, por ejemplo 5.016, en partes inversamente proporcionales a varios números, por ejemplo 2, 4 y 5, se reparte 5.016 en partes directamente proporcionales a los inversos de 2, 4 y 5, es decir, a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.

Para ello:

1º) Se reducen las fracciones a común denominador

m.c.m. (2, 4, 5) = 20 $\longrightarrow$ $\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$; $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$; $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$

2º) Se reparte 5.016 en partes directamente proporcionales a los numeradores 10, 5 y 4.

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = \frac{5.016}{19}$$

a = 2.640 b = 1.320 c = 1.056

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

1. De los siguientes pares de magnitudes, decir cuales son directamente y cuales inversamente proporcionales:

a) Velocidad media de un coche y el espacio recorrido.
b) Velocidad media de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.
c) El tiempo que está circulando y la distancia que recorre.
d) El tamaño de una cosa y el espacio que ocupa.
e) El número de trabajadores y el tiempo que tardan en hacer un trabajo.
f) Los kg de carne que compramos y su precio.
g) Volumen de agua almacenada y nº de personas a las que puede abastecer.
h) Días trabajados y sueldo percibido.
i) El nº de trabajadores y la cantidad de trabajo desarrollado.
j) La cantidad de trabajo y el tiempo que una persona tarda en concluirlo.

2. 7 personas han pagado en un restaurante 62’3 €. ¿Cuántas personas podrán comer en el mismo lugar y el mismo menú con 133’5 €?

3. Un automóvil recorre en 6 horas 450 Km. ¿Cuántas horas tardará en recorrer 750 Km?

4. Una fábrica consume en 30 días 540 Kw de electricidad ¿Cuánto consumirá en 96 días?

5. Una persona anda 9 Km en hora y media. ¿Cuántos Km andará en 7 horas?

6. Un árbitro de fútbol cobra 495 € por arbitrar 5 partidos. ¿Cuántos partidos habrá tenido que arbitrar para cobrar 1.485 €?

7. Sabemos que 8 trabajadores hacen una zanja en 15 días. ¿Cuántos obreros harán falta para acabarla en 11 días?

8. Un coche a una velocidad media de 55 Km/h tarda 8 horas en recorrer una distancia. ¿Cuántas horas tardará en recorrer la misma distancia yendo a 70 Km/h?

9. Un coche a velocidad de 60 Km/h tarda en recorrer una distancia 7'5 horas. ¿A qué velocidad deberá ir para recorrer la misma distancia en 6 horas?

10. Dos grifos tardan 24 días en llenar un depósito de agua. ¿Cuántos grifos harán falta para llenarlo en 6 días?

11. Una rueda de 3 m de circunferencia da 178 vueltas para recorrer una distancia determinada. Calcular el número de vueltas que habrá de dar otra rueda de 1'2 m de desarrollo para recorrer la misma distancia.

12. La rueda de un vehículo da 320 vueltas para recorrer 1 Km. ¿Cuántas vueltas dará para recorrer 150 m?

13. Sabiendo que por un grifo fluye agua a razón de 6 m^3 cada 8 horas, calcular el volumen de agua que fluirá en un día.

14. La pensión diaria de dos personas que comparten la misma habitación es de 75 €. ¿Cuánto costará el alojamiento de 14 personas en habitaciones dobles durante 10 días?

15. Para alimentar 4 caballos durante 6 días se necesitan 216 Kg de pienso. En las mismas condiciones, ¿cuántos días se podrán alimentar 10 caballos con 1.800 Kg de pienso?

16. Seis grifos llenan un depósito de 400.000 litros en 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 15 grifos iguales a los anteriores en llenar otro depósito de 600.000 litros de capacidad?

17. Dos fontaneros han realizado una obra en 5 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias deberán trabajar 4 fontaneros para hacer la misma obra en dos días?

18. Cinco trabajadores hacen un muro de 18 m. de largo en 12 días trabajando 8 horas diarias. Si hubiera 10 trabajadores que trabajen 6 horas al día, ¿cuántos días tardarían en hacer otro muro que mida 9 m más que el anterior?

19. Considerando que una familia compuesta por 6 miembros gasta 25 m^3 de agua en 8 días, calcular el gasto diario de una población de 15.000 habitantes.

20. Los gastos de alimentación de 36 personas suponen 288 € diarios. Calcula los días que podrán alimentarse, en las mismas condiciones, un colectivo de 101 personas con 8.080 €.

21. Por 20 días de trabajo, a razón de 8 horas diarias, un trabajador percibe 528 €. ¿Cuánto percibirá por 5 días de trabajo, a razón de 6 horas diarias?

22. La pólvora está compuesta por 75 partes de salitre, 10 partes de carbón y 15 partes de azufre. ¿Qué peso de cada uno de estos componentes habrá que emplear para obtener 790 Kg de pólvora?

23. En una obra trabajan dos obreros y han cobrado por ella 945 €. Uno de ellos trabajó 6 días y el otro 4 días. ¿Cuántos euros tiene que cobrar cada uno?

24. Tres trabajadores han cobrado por un trabajo 9234 €. Han dedicado a su realización 4, 5 y 7 días respectivamente. ¿Cuántos euros debe cobrar cada uno?

25. Cuatro obreros han cobrado por un trabajo 1034 €. Los días trabajados fueron respectivamente 11, 4, 3 y 2 días. Se retrasaron en la entrega de la obra y les descontaron el 3% de lo convenido. ¿Cuánto debe cobrar cada uno?

26. Tres pilotos se reparten un premio de 300 000 € en partes inversamente proporcionales al tiempo empleado en hacer un vuelo que ha sido de 5 horas, 7 horas y 9 horas respectivamente. ¿Cuánto cobró cada uno?

27. Entre 3 pueblos han construido una piscina común que les ha costado 129.000 €. La pagan en partes inversamente proporcionales a las distancias de cada pueblo a la piscina que son: 20 Km; 24 Km y 36 Km. ¿Cuál ha sido la aportación de cada localidad?

28. Tres hermanos contribuyen al mantenimiento de sus padres con 12.090 € al año que reparten en partes inversamente proporcionales a su edad que es respectivamente: 23, 25 y 30 años. ¿Cuántos euros pondrá cada uno?

29. Un libro tiene 350 páginas y cada página tiene 66 líneas con 80 caracteres por línea. ¿Cuántas páginas deberá tener otro libro que contenga 77 líneas por página y 60 caracteres por línea?

30. Para hacer el jardín de un parque se han necesitado 3 jardineros durante 15 días que han trabajado 8 horas diarias. Si se quiere hacer otro jardín en 4 días empleando 9 jardineros. ¿Cuántas horas tendrán que trabajar al día?

31. Tres empresarios contribuyeron a la compra de madera con 985 €, 1500 € y 2.100€ respectivamente. La vendieron conjuntamente con una ganancia de 800 €. ¿Cuántos euros corresponden a cada uno?

32. Un señor recibe el encargo de comprar tres billetes de RENFE, para tres ciudades que distan 65 Km, 90 Km y 140 Km respectivamente de la ciudad de origen. Le cobran por los tres billetes 295 €. ¿Cuántos € costaba cada billete?

33. Tres amigos juegan una quiniela que cuesta 560 €. Para pagarla aportaron 150 € y 240 € los dos primeros y el tercero el resto. Cobraron un premio de 2.840 €. ¿Cuántos euros debe cobrar cada uno?

34. Entre 6 personas quieren bordar un mantel y calculan que tendrán que trabajar 35 días, cosiendo 4 horas diarias. ¿Cuántas horas tendrán que trabajar 8 personas para bordar 5 manteles iguales en dos meses?

35. Por 204 € pueden comer 4 personas en un comedor durante 6 días. ¿Cuántos euros necesitarán 7 personas para comer 8 días en el mismo comedor?

36. Al repartir cierta cantidad de dinero en partes proporcionales a las edades de los tres hermanos, que tienen 15, 20 y 25 años respectivamente, le correspondió al mediano 650€ más que al pequeño. ¿Cuánto le correspondió a cada hermano?

37. La tripulación de un portaaviones está formada por 1400 personas que disponen de provisiones para 18 meses con una ración de 396 g por persona y día. ¿Cuántas personas deberían abandonar el barco si las mismas provisiones tuvieran que durar 21 meses con raciones de 432 g por persona y día?

TEMA 3: POLINOMIOS.

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

El **lenguaje algebraico** utiliza letras, números y signos de las operaciones fundamentales para expresar informaciones de la vida ordinaria.

EJEMPLO

Cuando decimos que una habitación mide doble de largo que de ancho lo podemos expresar en **lenguaje algebraico** indicando:

Ancho: x   Largo: 2x

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras unidas por los signos de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

EJEMPLOS

$2\,a\,b^2\,c$; $5\,x^3\,y\,z$; $4\,x^2\,y^3 - 2x + 1$; $\dfrac{5x^2+3}{2x}$; $2x^3 + 3x^2 - x + 5$

En toda expresión algebraica distinguimos dos partes: El factor numérico llamado **coeficiente** y las letras con sus exponentes llamada **parte literal.**
Cuando entre números y letras no aparece ningún signo entenderemos que está el signo de multiplicar (·)

3. VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El **valor numérico** es el valor que adquiere una expresión algebraica al asignar a las letras unos determinados valores, sustituirlas por éstos y efectuar las operaciones indicadas.

EJEMPLO

Calculamos el valor numérico de: $3\,x^2\,y^3\,z$. Siendo: $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$

$$3\,x^2\,y^3\,z = 3 \cdot (-1)^2 \cdot 2^3 \cdot 3 = 3 \cdot 8 \cdot 3 = \mathbf{72}$$

4. MONOMIOS

Monomio: es una expresión algebraica formada por un número y unas letras o variables separados únicamente por el signo de multiplicar y afectados por la potenciación de exponente entero positivo.

Al número se le llama **coeficiente** y a las letras con sus exponentes **parte literal.**

Grado **de un monomio es la suma de los exponentes de sus letras.**

EJEMPLO

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$5x^3$	5	x^3	3
$-\frac{2}{3}x^2y^4$	$-\frac{2}{3}$	x^2y^4	6
ab^3c^4	1	ab^3c^4	8

Ten en cuenta que: El coeficiente 1 no se escribe.
El exponente 1 no se escribe
El signo de multiplicar (x ó ·) no se escribe.

4.1 MONOMIOS SEMEJANTES

Dos o varios **monomios son semejantes** cuando tienen la misma parte literal.

EJEMPLO

Los monomios $2x^2$; x^2; $-5x^2$ son semejantes
Estos también son semejantes xy^3; $-2xy^3$; $7xy^3$
No son semejantes 5x; 5z

Dos **monomios** son **opuestos** cuando siendo semejantes, tienen los mismos coeficientes, pero con distinto signo.

EJEMPLO

$3x^3yz^2$; $-3x^3yz^2$ son monomios opuestos

4.2 OPERACIONES CON MONOMIOS

A) SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

Para **sumar** o **restar** monomios tienen que ser semejantes, y se suman o restan sus coeficientes dejando igual la parte literal. En caso de no ser semejantes no pueden sumarse.

EJEMPLO

a) $6x^4 + x^4 - 5x^4 = (6 + 1 - 5)x^4 = 2x^4$
b) $2x^4 + (-4x^4) = (2 - 4)x^4 = -2x^4$
c) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = (\frac{1}{2} + \frac{3}{5})x = \frac{11}{10}x$

B) MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Para multiplicar varios monomios, se multiplican los coeficientes y con la parte literal se opera como en el producto de potencias de la misma base.

EJEMPLO

$2x^3 \cdot 3x \cdot (-5x^2) \cdot x^4 = 2 \cdot 3 \cdot (-5) \cdot 1 \cdot x^{3+1+2+4} = -30\,x^{10}$

$-5xy \cdot \frac{-1}{10}y^3 \cdot 6x^2 = 3x^3y^4$

Observa que para multiplicar los monomios no tienen que ser semejantes.

C) DIVISIÓN DE MONOMIOS:
Para **dividir** dos monomios se dividen los coeficientes y con la parte literal se opera como en la división de potencias de la misma base.

EJEMPLO

$(-8x^7) : 2x^3 = (-8 : 2)x^{7-3} = -4x^4$

D) POTENCIA DE UN MONOMIO:
Para elevar un monomio a una potencia se elevan el coeficiente y la parte literal a esa potencia. (Recuerda cómo se eleva una potencia a otra potencia).

EJEMPLO

$(2\ a^3)^2 = 2^2\ (a^3)^2 = 4\ a^6$

5. POLINOMIOS.

Polinomio es una expresión algebraica formada por dos o más monomios que no son semejantes, separados por los signos de sumar o restar. A cada uno de estos monomios lo llamamos **término.**

Las expresiones P(x), Q(x),... indican polinomios de una variable x.

EJEMPLO

$P(x) = -5x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 4$. Este polinomio tiene 5 términos. Al término que sólo tiene coeficiente y no parte literal se le llama **término independiente**

Grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos. En el ejemplo anterior el **grado** es 4.
Los polinomios se suelen ordenar en función de los grados de cada término en orden decreciente.

5.1. VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Es el resultado que se obtiene al sustituir las letras o variables por números determinados y operar después.

EJEMPLO

Vamos a hallar el valor numérico para x = 1 del polinomio
$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$
Sustituimos x por el valor x = 1 y operamos:
$P(1) = 2\cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 2 - 3 + 1 - 2 = -2$
Así, el valor numérico de P(x) para x = 1,es decir, P(1) = – 2

6. OPERACIONES CON POLINOMIOS.

A) SUMA Y DIFERENCIA DE POLINOMIOS
Para sumar o restar polinomios, se suman o restan los términos semejantes de cada uno de los sumandos.

EJEMPLO

a) Suma y resta $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ y $Q(x) = - x^3 + x^2$

$P(x) + Q(x) = 2x^3 – 3x^2 + 4x + 1 - x^3 + x^2 = x^3 – 2x^2 + 4x + 1$
$P(x) - Q(x) = (2x^3 – 3x^2 + 4x + 1) – (- x^3 + x^2) = 2x^3 – 3x^2 + 4x + 1+ x^3 - x^2=$
$3x^3 – \quad 4x^2 + 4x + 1$
b) $(2x^2 + 6xy – 4y) + (5x^2 – 4xy – 3xb^2 – y) + (2xy + y^2 + 1) =$
$(2x^2 + \ 5x^2) + (6xy – 4xy +2xy) + (- 4y – y) – 3xb^2 + y^2 + 1 =$
$7x^2 + 4xy – 5y – 3xb^2 +y^2 +1$

B) MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO
Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica el monomio por todos los términos del polinomio.
Para **dividir** un polinomio entre un monomio se dividen todos los términos del polinomio entre el monomio divisor.

EJEMPLO

a) $(2x^3 + 3x^2 - x - 2)\cdot(-4x^2) = 2x^3\cdot(-4x^2) + 3x^2\cdot(-4x^2) - x\cdot(-4x^2) - 2\cdot(-4x^2) =$

$-8x^5 - 12x^4 + 4x^3 + 8x^2$

b) $(6x^5 – 3x^4 + 9x^2) : (-3x^2) = 6x^5 : (-3x^2) – 3x^4 : (-3x^2) + 9x^2 : (-3x^2) = -2x^3 + x^2 - 3$

C) MULTIPLICACIÓN DE DOS POLINOMIOS
El **producto** de dos polinomios es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primero por todos y cada uno de los términos del segundo y sumando luego los términos semejantes que resulten.

Es conveniente ordenar previamente los polinomios.

EJEMPLO

$(- 2x^2 + x + 3) \cdot (5x^2 – x) = 5x^2 \cdot (- 2x^2 + x + 3) + (- x) \cdot (- 2x^2 + x + 3) =$

$-10x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 2x^3 – 2x^2 – 3x = - 10x^4 + 7x^3 + 13x^2 – 3x.$

Esta operación la podemos disponer de la forma siguiente:

$$\begin{array}{r} -2x^2 + x + 3 \\ \underline{5x^2 - x} \\ -10x^4 + 5x^3 + 15x^2 \qquad \\ \underline{+2x^3 - \ x^2 - 3x} \\ -10x^4 + 7x^3 + 14x^2 - 3x \end{array}$$

D) DIVISIÓN DE DOS POLINOMIOS.
Los polinomios al igual que los números pueden dividirse. Si tenemos dos polinomios P(x) y Q(x) y los dividimos, obtenemos otros dos polinomios C(x) y R(x), cumpliéndose que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.
Si $R(x) = 0$, la división es exacta y el polinomio P(x) es divisible por Q(x)

7. REGLA DE RUFFINI
Vamos a estudiar la división de un polinomio P(x) entre otro polinomio de la forma x – a, aplicando la regla de Ruffini.
La regla de Ruffini sirve únicamente para dividir un polinomio por x – a.
Veamos con un ejemplo cómo se hace:

EJEMPLO

Vamos a dividir P(x) = $x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ entre Q(x) = x – 3 usando la regla de Ruffini.

Escribimos los coeficientes de los términos del dividendo P(x) ordenados decrecientemente según su grado, poniendo un cero en el lugar correspondiente a cada término que falte.

A la izquierda de estos coeficientes y en otra fila, escribimos el valor de a (si el divisor fuese de la forma x + a, escribiríamos –a). En nuestro ejemplo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

El primer coeficiente del cociente es igual al del dividendo. Los demás se obtienen multiplicando el coeficiente anterior por a, en nuestro caso por 3 y sumando el producto al coeficiente siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & & 3 & 9 & 21 & 72 \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 24 & 73 \end{array}$$

Cociente: C(x) = $x^3 + 3x^2 + 7x + 24$ Resto R(x) = 73

El último coeficiente obtenido es el resto que será un número. El polinomio cociente es el formado por los demás coeficientes y su grado es una unidad menor que el grado del dividendo.

EJEMPLO

Vamos a dividir P(x) = $2x^3 - 3x^2 - 5x - 5$ entre Q(x) = x + 2 usando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -5 & -5 \\ -2 & & -4 & 14 & -18 \\ \hline & 2 & -7 & 9 & -23 \end{array}$$

Cociente: C(x) = $2x^2 - 7x + 9$ Resto R(x) = -23

7.1. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR x – a

Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible por x – a es necesario que su término independiente sea múltiplo de a.

Por tanto, para buscar expresiones x – a que sean divisores de un polinomio, probaremos con los valores de a (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente.

EJEMPLO

Queremos saber si la división $(2x^3 - 8x^2 - 31x + 42) : (x - 5)$ es exacta.

Evidentemente, como 5 no es divisor de 42, ya sabemos que no va a ser exacta.

7.2. TEOREMA DEL RESTO

El valor numérico de un polinomio, P(x), para x = a, es el número que se obtiene al sustituir la x por la a y efectuar las operaciones indicadas. A ese número se le llama P(a).

EJEMPLO

Si $P(x) = 7x^4 - 11x^3 - 94x + 7$, para x = 3 obtenemos:

$P(3) = 7 \cdot 3^4 - 11 \cdot 3^3 - 94 \cdot 3 + 7 = -5$

Este valor, P(3) = -5, coincide con el resto de dividir P(x) entre x – 3. Y esto no es casual, sino general.

Teorema del Resto

El valor que toma un polinomio, P(x), cuando hacemos x = a, coincide con el resto de la división P(x) : (x - a). Es decir, P(a) = r.

De esta manera si necesitamos calcular el resto de la división podemos hacerlo por la regla de Ruffini, o directamente calculando el valor numérico.

EJEMPLO

Si queremos saber el resto de dividir $P(x) = -6x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ entre x + 2, podemos proceder de las siguientes maneras.

a) Calculando el valor numérico de P(-2)

$P(-2) = -6 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 1 = 25$

b) Aplicando la regla de Ruffini para x + 2

$$\begin{array}{r|rrrr} & -6 & -3 & +5 & -1 \\ -2 & & 12 & -18 & 26 \\ \hline & -6 & 9 & -13 & 25 \end{array}$$

8. IDENTIDADES NOTABLES

Las identidades notables resultan muy eficaces para abreviar algunos cálculos con expresiones algebraicas.

8.1. CUADRADO DE UNA SUMA

La expresión $\mathbf{(a + b)^2}$ es el cuadrado de la suma de dos monomio

$\mathbf{(a + b)^2} = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

El **cuadrado de la suma** indicada de dos monomios es igual al cuadrado del primero más el doble de multiplicar el primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

EJEMPLO

Calculamos el cuadrado de: $(2x + 3)^2$

$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

8.2 CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

La expresión $\mathbf{(a - b)^2}$ es el cuadrado de la diferencia de dos monomios

$\mathbf{(a - b)^2} = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

El **cuadrado de la diferencia** indicada de dos monomios es igual al cuadrado del primero menos el doble de multiplicar el primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

EJEMPLO

Calculamos el cuadrado de: $(2x - 3)^2$
$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

8.3. SUMA POR DIFERENCIA

Dados dos monomios **a** y **b**, podemos obtener el producto de su suma por su diferencia: $\mathbf{(a + b) \cdot (a - b)} = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$
El producto de la **suma** de dos monomios **por** su **diferencia** es igual a la diferencia de sus cuadrados.

EJEMPLO

Calculamos el producto $(2x + 3) \cdot (2x - 3)$
$(2x + 3) \cdot (2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

9. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

9.1 RAÍCES DE UN POLINOMIO

Se llama raíz de un polinomio P(x) a un número **a** si P(a) = 0. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación P(x) = 0

Para localizar las raíces enteras de un polinomio, probaremos con los divisores (positivos y negativos) de su término independiente.

Una vez localizada una raíz **a**, puesto que P(x) es divisible entre x – a, podremos ponerlo así: $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$. Las restantes raíces las buscaremos en $P_1(x)$.

9.2 PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

EJEMPLO

Veamos cómo factorizar P(x) $= 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$:

- Para localizar las raíces de P(x), iremos probando con los divisores (positivos y negativos) de 2. Empezaremos por 1 por -1.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -4 & -9 & 1 & 2 \\ 1 & & 4 & 0 & -9 & -8 \\ \hline & 4 & 0 & -9 & -8 & -6 \end{array}$$

Por tanto 1 no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -4 & -9 & 1 & 2 \\ -1 & & -4 & 8 & 1 & -2 \\ \hline & 4 & -8 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

Por tanto -1 es raíz.

Escribimos P(x) factorizado: P(x) = (x +1) ($4x^3 - 8x^2 - x + 2$)

- Ahora buscamos las raíces de $P_1(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$

1 ha quedado descartado. Probaremos de nuevo con -1 y resulta que no lo es (es decir, -1 es una raíz simple). A continuación probamos con 2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -8 & -1 & 2 \\ 2 & & 8 & 0 & -2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Por tanto -2 es raíz de $P_1(x)$.

La factorización de $P_1(x)$ quedaría: $P_1(x)$ = (x -2) ($4x^2 - 1$)

- Cuando queda un polinomio cuyas raíces se pueden localizar por otros medios, al hacerlo se concluye el proceso. En nuestro caso, reconocemos que $4x^2 - 1$ = (2x -1)(2x +1)

Por tanto el resultado final sería:

P(x) = (x +1)(x -2)(2x -1)(2x +1)

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

1. Expresa en lenguaje algebraico las siguientes frases del lenguaje ordinario:

a) El triple de un número. . . . .
b) La mitad de un número. . . . .
c) El cuadrado de un número. . . . .
d) Dos números naturales consecutivos. . . . .
e) La quinta parte de un número. . . . .
f) El cuadrado de un número más el doble de él. . . . . .
g) Un número más la mitad de él. . . . .
h) Hoy tengo una determinada edad, ¿cuántos años tendré dentro de 12 años?
i) El siguiente de un número. . . . .
j) El triple de un número menos cinco unidades. . . . . .
k) El anterior de un número natural cualquiera. . . . . . .
l) Un número par. . . . .
m) Un número impar. . . . .

2. Llamando **n** a un número natural cualquiera, escribe:

a) Los dos números naturales que le siguen.
b) La suma de ese número y los dos siguientes.
c) La mitad de la suma anterior.
d) El número anterior.
e) La suma del anterior y el siguiente.
f) La tercera parte del número anterior.
g) La mitad de la suma del anterior y el siguiente.
h) Piensa un número cualquiera, súmale 5 unidades, divídelo entre 3, multiplícalo por 4 y ahora réstale 10.

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones, según los valores siguientes: x = 2; y = - 2; z = 1; a = 3; b = - 1; c = - 2

a) $x^3 \; y \; z^2 =$
b) $5ab^3c =$
c) $- 2ab^3c^2 =$
d) $2xy^2 + 3\,x^3 – z^4 =$
e) $a^2 + b^3 – c^4 + 5 =$
f) $3\,a^2b – 5\,x^3 + b^2 + 2\,c – 1 =$

4. Calcula estas sumas:

a) $2x^3 + x^3 + 5x^3 + 4x^3 =$
b) $x^2y^4 + 7x^2y^4 + 3x^2y^4 – 9x^2y^4 =$
c) $5x^3y^3 – 4x^3y^3 + 3x^3y^3 – 6x^3y^3 + x^3y^3 =$
d) $-2\,a^2b^3c^5 + 6\,a^2c^5b^3 – 7b^3a^2c^5 + c^5b^3a^2 =$
e) $\frac{3x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{x}{5} + 2x =$
f) $\frac{3x^5y}{4} + \frac{4x^3y}{4} - \frac{x^3y}{4} =$

5. Reduce todo lo que puedas estas expresiones algebraicas:

a) $a^3 + 5\,a^3 =$ b) $4x^3 - 2x^2 =$
c) $4x^2 - 1 + a^2 + a =$ d) $3x^2 - 6x + 2 - x^2 + 5x - 8 =$

6. Realiza estas multiplicaciones:

a) $\frac{3}{2}x^3 \cdot \frac{2}{3}x =$ b) $\frac{4}{5}x^2 \cdot \frac{4}{5}x^4 =$

c) $2x \cdot (-\frac{5}{3}x^3) =$ d) $-3x^3 \cdot (-\frac{7}{4}x^2) =$

e) $x \cdot 3\,x^2 \cdot 2\,x^4 \cdot \frac{1}{3}x^3 =$ f) $2xy^2 \cdot 3y \cdot (-x^4y^3) =$

g) $2\,a^2bc^3 \cdot (-3\,a^4\,b) \cdot (-\frac{3a^2c^5}{2}) \cdot a^3\,b^3c =$

7. Calcula:

a) $\frac{8x^6}{2x^2} =$ b) $\frac{-12x^5}{-3x^2} =$

c) $\frac{3x^5 \bullet 4x^8}{-2x^6} =$ d) $\frac{5x^5y^4 \bullet 6x^3}{-10x^6} =$

e) $\frac{6a^5b^2}{2a^2b^3z^3} =$ f) $\frac{3}{5}x^5 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{2}x^2 =$

g) $\frac{6a^2b}{4a^2b} =$ h) $\frac{-15x^3y^2}{-3x^2y^2} =$

i) $\frac{\frac{5}{2}x^7}{2x^5} =$ j) $\frac{7x^3y^5}{\frac{2}{5}xy^3} =$

8. Calcula:

a) $(-2x)^3 =$ b) $(-3x^2)^2 =$ c) $(\frac{3}{2}a^3)^4 =$

d) $(\frac{5x^3y^4}{4})^3 =$ e) $(-\frac{2xy^4}{3})^3 =$ f) $(2x^3y^2z)^3 =$

9. Realiza estas sumas y restas de polinomios:
a) $(3x^2y - 4xy^3) - (x^2y - x^2y^3 + 5) + (x^2 + 2x^2y^3 + 7) =$

b) Siendo los polinomios:
$P(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x$
$Q(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 6;$

Calcula: $P_{(x)} + Q_{(x)}$ $P_{(x)} - Q_{(x)}$

c) Siendo los polinomios:
$P_{(x)} = x^3 – 2x^2 + 3x – 5$
$Q_{(x)} = -3x^3 + 5x^2 – 1$
$R_{(x)} = -4x^2 + 2x + 1$

Calcula: $P_{(x)} + Q_{(x)} + R_{(x)}$ $\quad$ $P_{(x)} – Q_{(x)} + R_{(x)}$

d) Dados los polinomios:
$P(x) = 5x^4 – 2x^2 + 8x – 9$
$Q(x) = 12x^4 + 10x^3 – 5x^2 + 8x$
$R(x) = -4x + 2x^3 – x^2 – 5$

Calcula: $P(x) + Q(x) – R(x)$

e) Dados los polinomios:
$P(x) = 3x^4 – x^3 + 2x^2 + 3x – 4$
$Q(x) = 4 + x^4 – 2x + x^3$
$R(x) = -x^4 + x^3 - 3 – 3x^2$
$S(x) = x^3 – 2x^2 + x + 1$

Calcular:

1) $P(x) + Q(x) – [R(x) + S(x)]=$
2) $[P(x) - Q(x)] – [R(x) + S(x)] =$
3) $Q(x) – \{P(x) – [R(x) + S(x)]\} =$

10.Calcula:

a) $(x^4 + 2x^2 – 5) \cdot (2x^3) =$

b) $(- 2x + 2 – x^3 + 3x^2) \cdot (- x^2) =$

c) $(\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{4}x^3 – 2x - \frac{3}{2}) \cdot (- \frac{4}{5}x^2) =$

d) $\dfrac{6x^4 + 2x^3 - 4x}{-2x} =$

e) $\dfrac{-x^3 + 3x^2 - 2x}{x} =$

f) $\dfrac{\frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2}{\frac{3}{2}x^2} =$

g) $\dfrac{-8x^7 - \frac{3}{5}x^5 - 4x^4 + \frac{4}{5}x^3}{2x^2} =$

11. Calcula estos productos:

a) $(5x^3 – 2x^2 + x – 1) \cdot (x^2 – 2x + 2) =$
b) $(-2x^4 – 3x^2 + 2x – 3) \cdot (-3x + 1) =$
c) $(x^3 – 2x^2 – 5x + 4) \cdot (3x^2 + x – 1) =$
d) $(a^2 – 2a) \cdot (2a^3 – 3a^2 + 6a – 3) =$
e) $(-5x + 2x^2) \cdot (-2 + 3x + 4x^2 – x^3) =$
f) $(-3x + 5x^3 + 2 – x^2 –2x^4) \cdot (-1 + 3x^2 – x) =$
g) $(-2x + 1 – 5x^2 + x^3) \cdot (3 + x^2 – 4x) =$

12. Dividir:
a) $P(x) = (x^3 + 2x^2 + x + 2)$ entre $(x – 1)$
b) $P(x) = (3x^3 – 4x^2 – 5x – 3)$ entre $(x – 2)$
c) $P(x) = (2x^5 + x^4 – 3x^3 + x – 7) : (x – 2)$

13. Calcula el valor numérico de:
a) $P(x) = (x^3 – 2x – 1 – 2x^2)$ para $x = - 3$
b) $P(x) = (2x^3 – 3x^2 – 18x – 6) : (x – 4)$
c) $P(x) = (x^4 – 2x^3 + 3x^2 – x + 1)$ para $x = 1$
d) $P(x) = (\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - x + \frac{3}{4})$ para $x = \frac{1}{2}$
e) $P(x) = (\frac{1}{3}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3}x + 1)$ para $x = - 2$

14. Realiza estas divisiones utilizando la regla de Ruffini:
a) $2x^3 + x + 2$ entre $x – 1$
b) $x^4 - 2 - 4x^3 + 3x$ entre $x – 3$
c) $(3x^4 – 3x + 4) : (x – 1) =$
d) $(-4x^4 + 2x^3 – 1 + 2x) : (x + 2) =$
e) $(3x^4 – 3x + 4) : (x + 1) =$

15. Calcula el valor numérico de:
a) $A(x) = 2x^3 + x + 2$ para $x = 1$
b) $B(x) = x^4 - 2 - 4x^3 + 3x$ para $x = 3$
c) $C(x) = 3x^4 – 3x + 4$ para $x = 1$
d) $D(x) = - 4x^4 + 2x^3 – 1 + 2x$ para $x = -2$
e) $E(x) = 3x^4 – 3x + 4$ para $x = -1$

¿Qué relación tienen con los restos obtenidos en las divisiones anteriores?

16. Un número es **raíz de un polinomio** cuando el valor numérico del polinomio para dicho número es cero. Determina si los números –2, -1, 0, 1 y 2 son raíces del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 – x – 1$.

17. Averigua cuáles de los números: 1, -1, 2, -2, 3 y -3 son raíces de los polinomios siguientes:

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$

$R(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$

$S(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

18. Efectúa:

a) $(x + 1)^2 =$
b) $(3x + 2)^2 =$
c) $(2x^2 + 3)^2 =$
d) $(x – 2)^2 =$
e) $(3x – 5)^2 =$
f) $(2x^2 – 2)^2 =$
g) $(-3x + 3) =$
h) $(x^2 – 2x) =$
i) $(x + 1) \cdot (x – 1) =$
j) $(2x + 2) \cdot (2x – 2) =$
k) $(x^2 + 3) \cdot (x^2 – 3) =$
l) $(3x – 3) \cdot (3x + 3) =$

19. Expresar como cuadrado de una suma o diferencia:

a) $x^2 + 8x + 16 =$ b) $x^2 + 12x + 36 =$

c) $x^2 - 4x + 4 =$ d) $9 - 12x + 4x^2 =$

20. Descompón en factores las diferencias de dos cuadrados:

a) $y^2 - z^2 =$ b) $4x^2 - 25 =$

c) $16a^2 - 49 =$ d) $x^4 - 64 =$

21. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 6x - 7$

b) $x^2 + 12x + 35$

c) $x^4 + 9x^3 - 10x^2$

d) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$

f) $2x^3 - 3x^2$

g) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

h) $x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 18x^2$

i) $x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 32x + 30$

j) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

TEMA 4: ECUACIONES DE PRIMER, SEGUNDO GRADO E IRRACIONALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. IGUALDADES. IDENTIDADES Y ECUACIONES

A. IGUALDADES

Observa las siguientes frases y sus expresiones mediante símbolos:

	Frases	Expresiones mediante símbolos
1ª	Cinco es igual a siete menos dos	$5 = 7 - 2$
2ª	La suma de un número con su doble es igual a su triple.	$x + 2x = 3x$
3ª	La suma de un número y dos es igual a nueve.	$x + 2 = 9$

- En todas estas expresiones aparece el signo “=” y se llaman **igualdades**.
- La primera igualdad es una **igualdad numérica**, y las igualdades 2ª y 3ª son igualdades entre expresiones algebraicas y se llaman **igualdades literales**.
- En toda igualdad hay que distinguir **el primer miembro** (lo escrito antes del signo =) y **el segundo miembro** (lo escrito después del signo =).

EJEMPLO

IGUALDADES

NUMÉRICAS	LITERALES
$7 - 2 = 5$	$x + 2x = 3x$
$56 = 7 \cdot 8$	$x + 2 = 9$

PRIMER MIEMBRO		SEGUNDO MIEMBRO
$7 - 2$	=	5
56	=	$7 \cdot 8$
$x + 2x$	=	$3x$
$x + 2$	=	9

B. IDENTIDAD

Una identidad es una igualdad literal que es cierta para cualquier valor de las letras.

EJEMPLO

$x + 2x = 3x$ es una igualdad literal que es cierta para cualquier valor de x.

C. ECUACIÓN

Una ecuación es una igualdad literal que sólo es cierta para algunos valores de las letras.

EJEMPLO

$x + 2 = 9$ sólo es cierta si $x = 7$.

La letra o las letras desconocidas de una ecuación se llaman **incógnitas.** En la ecuación $x + 2 = 9$, la incógnita es **x**.

La incógnita de una ecuación se puede designar con cualquier letra, pero en general se utiliza la letra **x**.

2. GRADO, SOLUCIÓN Y TÉRMINOS DE UNA ECUACIÓN

A. GRADO DE UNA ECUACIÓN

Por su grado las ecuaciones pueden ser de primer, segundo, o “n” grado, dependiendo del exponente de la incógnita.

EJEMPLO

- Un ejemplo de ecuación de primer grado sería: $6 + x = 4$, pues el mayor exponente de la incógnita, que es x, es 1.
- Un ejemplo de ecuación de segundo grado sería $x^2 + 7x + 8 = 6$, pues el mayor exponente de la incógnita es 2.
- Ecuación de séptimo grado: $x^7 - 9 = 4x$

B. SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN

Soluciones de una ecuación son los números que la verifican, es decir, los números que convierten la ecuación en una igualdad de números cierta.
Resolver una ecuación es hallar el valor de las incógnitas que hacen posible la igualdad.

EJEMPLO

La ecuación $x + 4 = 12$ sólo se verifica si $x = 8$. Por lo tanto, 8 es la solución de dicha ecuación.

C. TÉRMINOS DE UNA ECUACIÓN

Los términos de una ecuación son los sumandos que tiene cada miembro de la ecuación.
Los términos en los que aparezca la incógnita x se llamarán **términos en x**, y los términos en los que no aparezca ninguna incógnita (los que no llevan x) se llaman **términos independientes**.

EJEMPLO

Observemos esta ecuación de primer grado: $3x – 1 = x + 3$.
Los sumandos de cada miembro son: 3x, -1, x y 3, que son los términos de la ecuación.
3x, x son los términos en x.
-1, 3 son los términos independientes.

3. ECUACIONES EQUIVALENTES

Ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen las mismas soluciones.

EJEMPLO

Observa las ecuaciones:

$\boxed{x + 2 = 5}$ $\boxed{x + 6 = 9}$ $\boxed{5x = 15}$ $\boxed{-5x = -15}$

Es fácil comprobar que estas ecuaciones tienen todas la misma solución: $x = 3$.
Por lo tanto, todas son ecuaciones equivalentes.

A. ECUACIONES EQUIVALENTES POR ADICIÓN

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma un número o expresión algebraica cualquiera se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

EJEMPLO

Consideramos la ecuación $3x + 2 = 11$, cuya solución es $\mathbf{x = 3}$.
Sumemos a los dos miembros de la ecuación un número cualquiera, por ejemplo -2:

Entonces pasamos de $3x + 2 = 11$
a $3x + 2 - 2 = 11 - 2$
y operando obtenemos $3x = 9$

La ecuación que resulta, $3x = 9$, tiene la misma solución (**x = 3)** y es, por tanto, equivalente a la ecuación $3x + 2 = 11$.

Nota: Se observa que el término +2 ha cambiado de miembro (ha pasado del primer miembro al segundo) y que a la vez ha cambiado de signo (ha cambiado de signo + a signo -)
Esta operación recibe el nombre de **trasposición de términos**:

TODO TÉRMINO SE PUEDE PASAR DE UN MIEMBRO A OTRO CAMBIÁNDOLE EL SIGNO.

B. ECUACIONES EQUIVALENTES POR MULTIPLICACIÓN

Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por un número cualquiera distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

EJEMPLO

Consideremos la ecuación $3x = 6$, cuya solución es $\mathbf{x = 2}$.
Multipliquemos los dos miembros de la ecuación por un número cualquiera distinto de cero, por ejemplo, por 2:

Entonces pasamos de $3x = 6$
a $2 \cdot 3x = 2 \cdot 6$
y operando obtenemos $6x = 12$

La ecuación que resulta, $6x = 12$, tiene la misma solución (**x = 2)** y por lo tanto es equivalente a la ecuación $3x = 6$, que tiene también por solución $x = 2$.

En la práctica, dada la ecuación $3x = 6$,

multiplicamos por $\frac{1}{3}$, que es inverso de 3 : $\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 6$

De este modo quedará despejada la x: $1 \cdot x = \frac{6}{3}$

Obteniendo la solución buscada $x = 2$.

Nota: Observa que el número 3 pasa de ser factor (es decir, un número que multiplica) en el primer miembro de la ecuación ($3x = 6$) a ser divisor en el segundo miembro de $x = \frac{6}{3}$.

- TODO NÚMERO QUE MULTIPLICA A TODO UN MIEMBRO DE LA ECUACIÓN PASA AL OTRO MIEMBRO DIVIDIENDO.
- TODO NÚMERO QUE DIVIDE A TODO UN MIEMBRO DE LA ECUACIÓN PASA AL OTRO MIEMBRO MULTIPLICANDO.

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, trataremos de dejar la incógnita sola en un miembro.
Para ello:

- Se trasponen los términos de forma que los términos en **x** queden en un miembro y los términos independientes queden en el otro.
- Después se reducen los términos semejantes.
- Y por último se despeja la incógnita.

EJEMPLO

- **x + 3 = 8**

Para dejar la “x” sola, los términos que la acompañan pasan al otro lado respetando el siguiente orden:

En primer lugar, pasarán al otro miembro los términos que estén sumando o restando al término donde aparezca la incógnita, que lo harán con signo opuesto.

Y en segundo lugar, los que estén multiplicando o dividiendo a la incógnita, que lo harán dividiendo o multiplicando respectivamente.

Como “3” está sumando a la incógnita en el primer miembro, pasa al segundo miembro restando.

Así: x = 8 –3

Luego x = 5 es la solución de la ecuación.

EJEMPLO

- 2**x = 14**

Tenemos que dejar a la incógnita **x** sola

Como “2”está multiplicando a la incógnita en el primer miembro, pasa al segundo miembro dividiendo.

Así: x = $\frac{14}{2}$

Luego x = 7 es la solución.

EJEMPLO

- $\frac{3x}{4}$ **+ 8 = 6**

En primer lugar, pasamos al otro miembro lo que suma o resta al término en el que aparece la incógnita. Como 8 está sumando al término $\frac{3x}{4}$ que es en el que aparece la incógnita, pasa al otro miembro restando:

$$\frac{3x}{4} = 6 - 8$$

$$\frac{3x}{4} = -2$$

En segundo lugar, pasamos al otro miembro lo que multiplica o divide a la incógnita. **4** está dividiendo a la incógnita, luego pasa al otro miembro multiplicando:

$$3x = -2 \cdot 4$$
$$3x = -8$$

3 está multiplicando a la incógnita, luego pasa al otro miembro dividiendo:

$$x = \frac{-8}{3}$$

EJEMPLO

- $6x - 4 = 3x + 2$

  Trasponemos los términos, de forma que los términos en x queden agrupados en un miembro, y los términos independientes en el otro:
  $$6x - 3x = 2 + 4$$
  Reducimos los términos semejantes:
  $$3x = 6$$
  Por último despejamos la incógnita:
  $$x = \frac{6}{3}$$
  $$x = 2$$

5. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS

Para resolver estas ecuaciones se procede primero a quitar los paréntesis para lo cual nos podemos encontrar dos casos:

a) Si el paréntesis lleva delante un signo, dicho signo se multiplica por todos los signos que hay en el interior del paréntesis.

EJEMPLO

$$2x - (7 - 3x) = 4$$
$$2x - 7 + 3x = 4$$
$$2x + 3x = 4 + 7$$
$$5x = 11$$
$$x = \frac{11}{5}$$

b) Cuando el paréntesis va precedido de un signo y número que multiplica a dicho paréntesis, se multiplica signo y número por los elementos del interior del paréntesis.

EJEMPLO

$$3 - 5 \cdot (4 - 2x) = 6x$$
$$3 - 20 + 10x = 6x$$
$$10x - 6x = 20 - 3$$
$$4x = 17$$
$$x = \frac{17}{4}$$

6. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON DENOMINADORES

Para resolver ecuaciones que presenten sumas y restas de fracciones se procede del modo siguiente:

1. Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores que aparezcan.

2. Se multiplican LOS DOS MIEMBROS por el m.c.m. de los denominadores. De este modo desaparecen los denominadores.
3. Quitamos los paréntesis, en el caso de que los haya, aplicando la propiedad distributiva.
4. Se trasponen los términos de forma que los términos en **x** queden en un miembro y los términos independientes queden en el otro.
5. Se reducen los términos semejantes.
6. Finalmente se despeja la incógnita.

EJEMPLO

$$\frac{2\cdot(x-3)}{3} + \frac{9-x}{6} = 1$$

1. Calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores que aparezcan:

   m.c.m.(3, 6) = 6

2. Se multiplican los dos miembros por el m.c.m. de los denominadores:

$$\frac{6\cdot 2\cdot(x-3)}{3} + \frac{6\cdot(9-x)}{6} = 6\cdot 1$$

   De este modo desaparecen los denominadores:

   $4 \cdot (x - 3) + (9 - x) = 6$

3. Quitamos los paréntesis:

   $4x - 12 + 9 - x = 6$

4. Se trasponen los términos de forma que los términos en **x** queden en un miembro y los términos independientes queden en el otro:

   $4x - x = 6 + 12 - 9$

5. Se reducen los términos semejantes:

   $3x = 9$

6. Finalmente se despeja la incógnita:

$$x = \frac{9}{3}$$

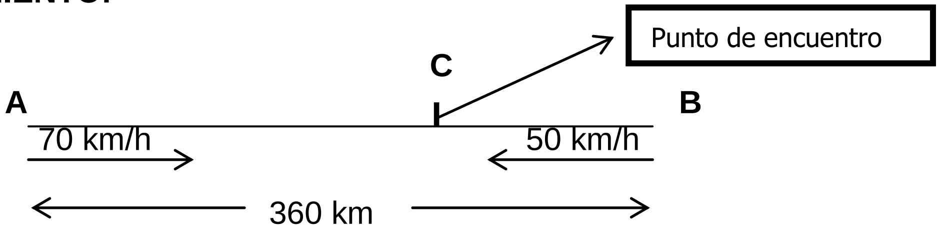
$$x = 3$$

7. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES

EJEMPLO

Dos ciudades A y B distan entre sí 360 Km. A las 5 de la tarde sale un coche desde la ciudad A hacia la ciudad B con una velocidad de 70 Km/h. A la misma hora sale un camión desde B hacia A con una velocidad de 50 Km/h. ¿A qué hora se encuentran ambos coches?

a) PLANTEAMIENTO:



AC + CB = 360 (Recordemos que espacio = velocidad · tiempo)

70**t** **+** 50**t** = 360

Llamamos **t** al tiempo que tardarán en encontrarse.

b) RESOLUCIÓN:

$$70\mathbf{t} + 50\mathbf{t} = 360$$
$$120t = 360$$
$$t = \frac{360}{120} = 3 \text{ horas}$$

Tardan en encontrarse 3 horas. Se encuentran a las 3 + 5 = 8 de la tarde.

c) COMPROBACIÓN:

El coche ha recorrido 70 · 3 = 210 Km
El camión ha recorrido 50 · 3 = 150 Km
Se comprueba que: 210 Km + 150 Km = 360 Km.
LUEGO, los dos vehículos se encuentran a las 8 de la tarde.

EJEMPLO

PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS.

Frecuentemente existen en el mercado productos de la misma clase pero de calidad y precios diferentes.
En ocasiones tiene interés mezclar dos calidades de un mismo producto con el fin de obtener un producto de calidad intermedia y cuyo precio esté comprendido entre los precios de los productos mezclados. Así, veamos el siguiente ejemplo:
Un comerciante tiene dos clases de café, la primera a 3 € el Kg y la segunda a 4’5 € el Kg. ¿Cuántos Kg hay que poner de cada clase de café para obtener 60 Kg de mezcla a 3’5 € el kg?

a) PLANTEAMIENTO:

	Café de 3 €/kg	Café de 4’5 €/kg
Número de Kilos	x	60 – x
Valor del café	3 · x	4’5 · (60 – x)
Valor total de la mezcla	3x + 4’5(60 - x)	

$$3x + 4'5(60 - x) = 3'5 \cdot 60 \longrightarrow$$

Precio de la mezcla de café que conocemos por el enunciado.

b) RESOLUCIÓN:

$$3x + 4'5(60 - x) = 3'5 \cdot 60$$
$$3x + 270 - 4'5x = 210$$
$$3x - 4'5x = 210 - 270$$
$$-1'5x = -60$$
$$x = \frac{-60}{-1'5} = 40$$

Café de 3€/kg: 40 Kg, café de 4’5€/kg: 60 – x = 60 – 40 = 20 Kg

c) COMPROBACIÓN:

40 Kg de la primera clase cuestan 40 · 3 = 120 €
20 Kg de la segunda clase cuesta 20 · 4’5 = 90 €
Por lo tanto los 60 Kg de mezcla costarán 210 € y cada Kg sale a $\frac{210}{60} = 3'5€$
Esta comprobación nos confirma que el problema está bien resuelto.

8. SISTEMAS DE ECUACIONES.

8.1. SISTEMA DE ECUACIONES. DEFINICIÓN

Un sistema de ecuaciones es un conjunto formado por varias ecuaciones con varias incógnitas.

8.2. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar los valores de las incógnitas que hacen posible las dos ecuaciones.

EJEMPLO

Vamos a tratar de encontrar la solución de este sistema. Para ello, tenemos que ver qué valores de las incógnitas verifican las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

8.3. MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Para hallar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas podemos seguir tres métodos: **reducción, sustitución e igualación.**

8.3.1. MÉTODO DE REDUCCIÓN

El método de reducción consiste en conseguir que al sumar las dos ecuaciones del sistema resulte una ecuación con una sola incógnita.

Para ello será necesario multiplicar los dos miembros de una ecuación y en algunos casos los de las dos ecuaciones por números convenientes para que en las dos ecuaciones los coeficientes de una de las dos incógnitas sean números opuestos.

EJEMPLO 1

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

Observamos que los coeficientes de la incógnita **y** son números opuestos.

En este caso, se suman directamente las dos ecuaciones miembro a miembro y así resulta una ecuación con una sola incógnita:

$$\begin{array}{r} x + \cancel{y} = 7 \\ 2x - \cancel{y} = -4 \\ \hline 3x \quad = 3 \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{Ecuación lineal en una sola incógnita}}$$

$x = \frac{3}{3} = 1$ se sustituye en una ecuación del sistema:

$$x + y = 7$$
$$1 + y = 7$$
$$y = 7 - 1 = 6$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 1, y = 6}}$

EJEMPLO 2

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Podemos proceder del modo siguiente:
1. Se multiplican los dos miembros de la segunda ecuación por -2 y así resultan dos ecuaciones que tienen opuestos los coeficientes de x:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\hspace{6cm}} \\ \longrightarrow \quad (-2)(x + 3y = 11) \quad \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x - 6y = -22 \end{cases}$$

2. Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones y así resulta una ecuación con una sola incógnita:

$$\begin{array}{r} 2\cancel{x} + y = 7 \\ -\cancel{2x} - 6y = -22 \\ \hline -5y = -15 \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{Ecuación lineal en una sola incógnita}}$$

3. Se resuelve esta ecuación: $y = \frac{-15}{-5} = 3$

Su valor se sustituye en una ecuación del sistema para obtener el valor de x:

$$x + 3y = 11$$
$$x + 3 \cdot 3 = 11$$
$$x = 11 - 9$$
$$x = 4$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 4, y = 3}}$

EJEMPLO 3

$$\begin{cases} 3x + 7y = -15 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -7 y la segunda por 3 resulta el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 7y = -15 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow (-7)(3x + 7y = -15) \longrightarrow \\ \longrightarrow 3(7x + 3y = 5) \qquad \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} -21x - 49y = 105 \\ 21x + 9y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -\cancel{21x} - 49y = 105 \\ \cancel{21x} + 9y = 15 \\ \hline -40y = 120 \end{array}$$

$$y = \frac{120}{-40} = -3$$

Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación del sistema resulta:

$$7x + 3 \cdot (-3) = 5$$
$$7x - 9 = 5$$
$$7x = 5 + 9 = 14$$
$$x = \frac{14}{7} = 2$$

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 2, y = -3}}$

8.3.2. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

Para resolver un sistema por el método de sustitución procedemos así:

1. Despejamos una incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones.
2. Sustituimos en la otra ecuación la incógnita despejada.
3. Resolvemos la ecuación resultante, que es una ecuación lineal con una sola incógnita.
4. Por último, sustituimos el valor de la incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, y así calculamos el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

Para resolver este sistema por el método de sustitución, procedemos como hemos señalado anteriormente:

1. Despejamos una incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones. Por ejemplo, en la primera ecuación despejamos la incógnita **x**:

$$x = 7 - y$$

2. Sustituimos en la otra ecuación la incógnita despejada. En este caso la incógnita y se sustituye por su valor (7 – x) en la segunda ecuación:

$$2(7 - y) - y = -4$$

3. Resolvemos la ecuación resultante, que es una ecuación lineal con una sola incógnita.

$$14 - 2y - y = -4$$
$$-3y = -4 - 14$$
$$-3y = -18$$
$$y = \frac{-18}{-3}$$
$$y = 6$$

4. Ahora sustituimos el valor de **y** en la expresión que ya tenemos despejada, y calculamos el valor de **x**:

$$x = 7 - y$$
$$x = 7 - 6 = 1$$

SOLUCIÓN: $\boxed{x = 1, y = 6}$

8.3.3. MÉTODO DE IGUALACIÓN

Para resolver un sistema por el método de igualación, procedemos del modo siguiente:

1. Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Igualamos los resultados que hemos obtenido. De esta forma, hemos conseguido una ecuación lineal con una sola incógnita.
3. Resolvemos la ecuación resultante.
4. Por último, sustituimos el valor de la incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, y calculamos el valor de la otra incógnita.

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{array}\right\}$$

1. Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones. Por ejemplo, despejamos la incógnita **y**:

De la primera ecuación: y = 7 – x
De la segunda ecuación: - y = - 4 – 2x $\Longrightarrow$ y = 4 + 2x

2. Igualamos los resultados obtenidos:

7 – x = 4 + 2x

3. Resolvemos la ecuación resultante:

7 – x = 4 + 2x
-x – 2x = 4 - 7
-3x = -3

$$x = \frac{-3}{-3} = 1$$

4. Ahora sustituimos este valor en cualquiera de las dos expresiones donde tenemos despejada la **y**:

y = 7 – x
y = 7 – 1 = 6

SOLUCIÓN: $\boxed{\mathbf{x = 1, y = 6}}$

8.4. SISTEMAS DE 3 ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS.

Transformamos un sistema de 3 ecuaciones lineales en un sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right. \xrightarrow{\textit{Queremos conseguir esto}} \left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -16 \\ 0 + ?y + ?z = ? \\ 0 + 0 + ?z = ? \end{array}\right.$$

Pasos

1- Suprimimos la x de la segunda ecuación, reduciéndola con la primera.

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \end{array}\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \end{array}\right. \longrightarrow \begin{array}{l} 1^a \ (-3) \\ 2^a \end{array}\left\{\begin{array}{l} -3x - 6y + 9z = 48 \\ 3x + y - 2z = -10 \end{array}\right. \xrightarrow{1^a+2^a} 0x - 5y + 7z = 38$$

La segunda ecuación aparece ya sin x.

2- Suprimimos la x de la tercera ecuación reduciéndola con la primera.

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \end{array}\left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -16 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \ (-2) \\ 3^a \end{array}\left\{\begin{array}{l} -2x - 4y + 6z = 32 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right. \xrightarrow{1^a+3^a} 0x - 7y + 7z = 28$$

La tercera ecuación aparece ya sin x.

3- Escribimos el sistema obtenido. $\begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{matrix}\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 0x - 5y + 7z = 38 \\ 0x - 7y + 7z = 28 \end{cases}$

4- Eliminamos la y de la tercera reduciéndola con la segunda.

$$\begin{matrix} 2^{a}\ (7) \\ 3^{a}\ (-5) \end{matrix}\begin{cases} -5y + 7z = 38 \\ -7y + 7z = 28 \end{cases} \to \begin{cases} -35y + 49z = 266 \\ +35y - 35y = -140 \end{cases} \to 14z = 126$$

5- Con el sistema escalonado obtenemos las soluciones.

$$\begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{matrix}\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 0x - 5y + 7z = 38 \\ 0x + 0y + 14z = 126 \end{cases}$$

-Calculamos z en la 3ª ecuación. $14z = 126 \Rightarrow \quad z = 9$
-Sustituimos z en la 2ª y calculamos la y. $-5y + 7(9) = 38 \Rightarrow y = 5$
-Sustituimos z e y en la 1ª para calcular la x. $x + 2(5) - 3(9) = -16 \Rightarrow x = 1$

6- Comprobamos la solución sustituyendo los valores obtenidos en el sistema original.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

1ª ecuación: 1 + 2·5 – 3·9 = 1 + 10 – 27 = 11 – 27 = -16
2ª ecuación: 3·1 + 5 – 2·9 = 3 + 5 – 18 = 8 – 18 = -10
3ª ecuación: 2·1 – 3·5 + 9 = 2 – 15 + 9 = 11 – 15 = -4

9. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación de la forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde: **x** es la **incógnita** y **a, b, c** son los **coeficientes.**

Puede ocurrir que “b” o “c” sean cero, dando lugar a las **ecuaciones de segundo grado incompletas.** Quien nunca puede ser cero es “a”.

EJEMPLOS

a)	$3x^2 + 5x + 6 = 0$	donde a = 3; b = 5 y c = 6
b)	$2x^2 - 9x + 7 = 0$	donde a = 2; b = -9 y c = 7
c)	$-6x + x^2 - 8 = 0$	donde a = 1; b = -6 y c = -8
d)	$-x^2 - 7x + 1 = 0$	donde a = -1; b = -7 y c = 1

EJEMPLOS

a)	$x^2 - x = 0$	donde a = 1; b = -1 y c = 0
b)	$-4x^2 + 5 = 0$	donde a = -4; b = 0 y c = 5

9.1. SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.

Se llaman **soluciones** de una ecuación de segundo grado a los valores de la **x** que hacen que se verifique la igualdad $ax^2 + bx + c = 0$.

EJEMPLO

a) x = 1 es solución de la ecuación de segundo grado $x^2 - 2x + 1 = 0$, puesto que:

$$(1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 2 - 2 = 0.$$

b) x = -1 no es solución de la ecuación de segundo grado $x^2 - 2x + 1 = 0$, puesto que:

$$(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 \neq 0$$

10. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

Hemos visto que las ecuaciones de segundo grado incompletas pueden ser de dos tipos, dependiendo de si b = 0 ó si c = 0.

CASO A) b = 0

En este caso tenemos que encontrar las soluciones de ecuaciones del tipo:

$$\mathbf{ax^2 + c = 0}$$

Para ello, despejamos directamente la **x**. En primer lugar, despejamos $\mathbf{x^2}$ y después le aplicamos la raíz cuadrada para obtener el valor de **x.**

Procederemos así:

$$ax^2 + c = 0 \iff ax^2 = -c \iff x^2 = \frac{-c}{a} \iff \begin{cases} x_1 = +\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \end{cases}$$

x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación .

OBSERVACIÓN: Si $\frac{-c}{a}$ es negativo, la ecuación no tiene solución.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación $2x^2 - 8 = 0$

$$2x^2 = 8;\ x^2 = \frac{8}{2} = 4;\ x = \pm\sqrt{4} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x_1 = 2} \\ \mathbf{x_2 = -2} \end{cases}$$

CASO B) c = 0

En este caso tenemos que encontrar la solución de ecuaciones del tipo:

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$$

Para ello sacamos **x** factor común: **x · (ax + b) = 0**

Obteniéndose así un producto de dos factores igualado a cero que sólo es posible cuando al menos uno de los dos vale cero. Luego:

O bien, **x = 0** lo que nos da la primera solución.

O bien $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$ que es la segunda solución.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación: $3x^2 + 15x = 0$

Sacamos factor común: $x(3x + 15) = 0$

$$\mathbf{x_1 = 0}$$

$$3x + 15 = 0 \Leftrightarrow 3x = -15 \Leftrightarrow x = \frac{-15}{3} \Leftrightarrow \mathbf{x_2 = -5}$$

11. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

Sea $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Para resolver esta ecuación, es decir, para encontrar sus soluciones, aplicamos la siguiente fórmula:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Identificamos coeficientes a = 1; b = -3; c = 2

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $\mathbf{x_1 = 1}$; $\mathbf{x_2 = 2}$

12. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Resolver un problema es hallar sus soluciones. La resolución de un problema consta de cinco partes:

1. Elección de la incógnita o incógnitas con las letras x, y, z, ... (Elegir el menor número posible de incógnitas).

2. Planteamiento del problema.

3. Resolución de la ecuación resultante mediante el planteamiento.

4. Comprobación.

5. La discusión o interpretación de los resultados.

EJEMPLO

Hallar un número natural que multiplicado por él mismo disminuido en 2 sea igual a 75 más la mitad del número buscado.

1. Elección de la incógnita: x = Número buscado.

2. Planteamiento del problema:
Número buscado disminuido en 2: $x - 2$
Producto del número por él mismo disminuido en 2: $x \cdot (x - 2)$
Mitad del número buscado: $\frac{x}{2}$
75 más la mitad del número buscado: $75 + \frac{x}{2}$

$$x \cdot (x - 2) = 75 + \frac{x}{2}$$

3. Resolvemos la ecuación del planteamiento:

$$x \cdot (x - 2) = 75 + \frac{x}{2}$$

$$x^2 - 2x = 75 + \frac{x}{2}$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{4x}{2} = \frac{150}{2} + \frac{x}{2}$$

$$2x^2 - 4x = 150 + x$$

$$2x^2 - 4x - 150 - x = 0$$

$$2x^2 - 5x - 150 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-150)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1225}}{4} = \frac{5 \pm 35}{4} = \begin{cases} \frac{5+35}{4} = 10 \\ \frac{5-35}{4} = -\frac{30}{4} = \frac{-15}{2} \end{cases}$$

4. Comprobación:

$x_1 = 10$ $\quad 10 \cdot (10 - 2) = 75 + \frac{10}{2}$ $\quad 10 \cdot 8 = 75 + 5$ $\quad 80 = 80$

$x_2 = \frac{-15}{2}$ $\quad \frac{-15}{2} \cdot (\frac{-15}{2} - 2) = 75 + \frac{\frac{-15}{2}}{2}$

$\frac{-15}{2} \cdot (\frac{-19}{2}) = 75 - \frac{15}{4}$ $\quad \frac{285}{4} = \frac{300-15}{4}$ $\quad \frac{285}{4} = \frac{285}{4}$

5. Discusión o interpretación de los resultados.

En este caso no es válida la solución $x_2 = \frac{-15}{2}$ ya que el enunciado del problema nos pedía un **número natural**, por tanto el número natural buscado es 10

13. ECUACIONES IRRACIONALES

Ocasionalmente nos encontramos con ecuaciones en las que la x se halla bajo una raíz cuadrada. Para resolver este tipo de ecuaciones suele ser conveniente eliminar la raíz aislándola primero en un miembro y después elevando ambos miembros al cuadrado. Pero, ¡atención!, en este proceso de elevar al cuadrado, aunque se conservan todas las soluciones pueden introducirse soluciones nuevas que, naturalmente, hay que rechazar. Por eso es **fundamental comprobar todas las soluciones.**

EJEMPLO

$$\sqrt{x^2+7}+2=2x \rightarrow \sqrt{x^2+7}=2x-2$$

Elevando al cuadrado los dos miembros:

$$(\sqrt{x^2+7})^2=(2x-2)^2$$
$$x^2+7=4x^2+4-8x$$
$$x^2+7-4x^2-4+8x=0$$
$$-3x^2+8x+3=0$$
$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-3)\cdot 3}}{2\cdot(-3)}=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{-6}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{-6}=\frac{-8\pm 10}{-6}$$

Las soluciones serán: $x_1=\frac{-8+10}{-6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$ **y** $x_2=\frac{-8-10}{-6}=\frac{-18}{-6}=3$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

1. Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) 2x + 7 = 13
b) – 4x + 30 = 18
c) 2x – 7 = 3x – 8
d) 6x – 4 = 3x + 2
e) 5x – 1 + 11x = 7 + 2x
f) 2 – 8x + 11 = 7 x – 3 + 10x

2. Calcular el valor de x:

a) $\frac{x}{3}=6$; b) $\frac{x}{7}=12$; c) $\frac{-x}{2}=16$; d) $\frac{-x}{2}+3=8$; e) $\frac{x}{3}+5=2x-15$

3. Resolver quitando previamente los paréntesis:

a) 9 · (x - 1) = 6
b) 12 – (x -3) = 9
c) 3 · (x +1) – 5 = 2x + 1
d) 8 – (4 - x) = 9
e) 8 · (2x +1) –3 ·(3x +1) = 7

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{-x}{2}+3=8$ b) $\frac{x}{3}+5=2x-15$ c) $\frac{x-2}{3}=6$

d) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-1}{6}=1$ e) $\frac{3x}{6}-\frac{x+6}{3}=-2$ f) $\frac{x+1}{10}-\frac{x-3}{6}=0$

g) $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{4}=1$ h) $\frac{x+2}{9}-\frac{x-1}{3}=-1$ i) $\frac{x+1}{5}-\frac{x+3}{6}=0$

j) $x-\frac{x+1}{2}=3$ k) $\frac{x-2}{6}-\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{2}=0$

l) $\frac{x}{3}+\frac{x+2}{4}-\frac{x+3}{9}=3$ m) $\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{6}+\frac{x+3}{5}=2$

5. Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) 2x + 7 = 13
b) – 4x + 30 = 18
c) 2x – 7 = 3x – 8
d) 6x – 4 = 3x + 2
e) 5x – 1 + 11x = 7 + 2x
f) 2 – 8x + 11 = 7x – 3 + 10x

6. Resuelve:

a) 3 · (6 + x) = 2 · (x - 6)
b) 9 · (x - 1) = 6· (2x – 4)
c) 16 · (x-2) = 24 · (x -3)
d) 5 · (3x + 2) - 5 = 24x + 1
e) 2 · (5 + x) = 6x + 2
f) 2 · (x – 7) = - 4 · (x - 1)
g) 8 – (4 - x) = 9
h) 7 – (2x – 3) = 2

7. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x+5}{2}=\frac{2x+3}{3}$

b) $\frac{2x-1}{3}=\frac{4x+2}{5}$

c) $\frac{x+1}{6}-\frac{x+3}{4}=-1$

d) $2x+\frac{x+2}{8}=\frac{x+7}{3}$

e) $\frac{2x+1}{15}-\frac{x+2}{9}=0$

f) $\frac{3x+2}{5}-7=2x-\frac{x+1}{2}$

8. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x-1}{5}+5=x-1+\frac{x+1}{4}$

b) $\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{6}+\frac{x+3}{5}=2$

c) $\frac{3-x}{6}-\frac{x}{2}=\frac{1-x}{5}+\frac{2-x}{3}$

d) $\frac{x-2}{3}=10-\frac{3(1-x)}{2}$

e) $3(x-1)+\frac{5x-2}{4}=x+\frac{6x+3}{5}$

f) $\frac{2(3x-1)}{5}-\frac{11x}{20}=\frac{3(2x+1)}{4}-\frac{3x}{10}-5$

9. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}2x+3y=5\\ x-y=-5\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}5x-2y=11\\ 3y+x=9\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ x-y=6\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}2x+3y=5\\ x-y=-5\end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r}x-y=1\\ 8x+15y=100\end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r}x+y=-9\\ -2x-7y=8\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}x+3y=4\\ 2x-y=1\end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{r}2y+8x=4\\ -5x+3y=-1\end{array}\right\}$

10. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l}2x-y=3\\ 4x+3y=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}x+y=1\\ 3x-4y=7\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l}5x-y=7\\ 2x+3y=-4\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}3x-2y=3\\ x-3y=-6\end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{l}5x-y=9\\ x-y=1\end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{l}2x-3y=2\\ x-2y=0\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ x - y = 9 \end{array}\right\}$ i) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{l} 3x - y = 20 \\ x + 2y = 9 \end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{l} 5x - 2y = 3 \\ 4x - y = 2 \end{array}\right\}$ l) $\left.\begin{array}{l} \frac{2x-1}{3} - \frac{y+3}{2} = 1 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 5 \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{8} = 1 \end{array}\right\}$ n) $\left.\begin{array}{l} \frac{5x+y}{4} - 2y = -7 \\ \frac{7x+6y}{8} + y = 7 \end{array}\right\}$ ñ) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{2} - \frac{5x+y}{6} = 2 \\ \frac{3x+2y}{2} = x + 3 \end{array}\right\}$

11. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

12. Hallar dos números tales que si se divide el primero por 5 y el segundo por 4, la suma de esos cocientes es 6; y si se multiplica el primero por 3 y el segundo por 2, la suma de esos productos es 69.

13. Hallar dos números cuya suma sea 40, y cuya diferencia sea igual a $\frac{2}{3}$ del mayor.

14. La suma de dos números es 42 y su diferencia 12. Halla dichos números.

15. Calcula un número tal que su triple aumentado en 15 nos da 66.

16. Dentro de 8 años una persona tendrá el doble de edad de la que tenía hace ese mismo tiempo. Hallar su edad actual.

17. La suma de tres números consecutivos es el cuádruple del menor de ellos. Calcular los tres números.

18. Si al número que estoy pensando, le sumáis su mitad, su cuarta parte y su quinta parte, resulta 78. ¿Cuál es el número que pienso?

19. Calcular la edad de cada uno de los hermanos sabiendo que el primero tiene tres años más que el segundo y éste nueve años más que el tercero. La suma de los tres es 39 años.

20. Calcular el precio de un objeto sabiendo que después de pagar la mitad, la cuarta parte y sexta parte del total, faltan aún 40 € por pagar.

21. Halla un número sabiendo que la diferencia entre su cuarta y su décima parte es 9.

22. Los viajeros de un avión pertenecen a 4 nacionalidades diferentes. Colocados en orden creciente, el número de cada uno de ellos es el doble del anterior. En total hay 225 viajeros. ¿Cuántos viajeros hay de cada nacionalidad?

23. ¿Cuál es el número cuya quinta parte más seis sea igual a su duplo más 18?

24. En un corral hay gallinas y conejos. En total hay 50 cabezas y 140 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?

25. El padre de un alumno tiene el triple de edad que él y dentro de 8 años sólo tendrá el doble de la que entonces tenga el hijo. ¿Qué edad tienen ahora cada uno?

26. La suma de tres números consecutivos es igual a la unidad aumentada en el doble del mayor. Calcular los tres números.

27. Dos peatones que distan entre sí 45Km van al encuentro. El primero a 5Km/h y el segundo a 4Km/h. ¿Cuándo y dónde se encontrarán?

28. Un padre reparte una finca entre sus tres hijos. Al hijo mayor le asigna la tercera parte de la finca más 80ha, al segundo la cuarta parte más 20ha, y al tercero la cuarta parte. ¿Cuál será la extensión de la finca? ¿Qué parte de la finca corresponde a cada uno?

29. Un comerciante ha vendido 18 artículos de clase A y 13 artículos de clase B por 912 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo sabiendo que un artículo de clase B cuesta 3 veces más que un artículo de clase A?

30. Una señora va a comprar con 40 € y vuelve a casa con 8 €. Sabiendo que en la carnicería gastó el doble que en la pescadería y el la frutería gastó 3 € menos que en la carnicería, ¿cuánto gastó en cada tienda?

31. Tres amigos A, B, C, compran en el mercado aceite por valor de 98 €. B se lleva el doble de aceite que A, y C se lleva el doble que B.
¿Qué cantidad debe pagar cada uno?

32. La valla que rodea un campo rectangular mide 3200 metros.
¿Cuáles son las dimensiones del campo si su largo es triple de su ancho?

33. Se reparte la cantidad de 150 € entre tres personas: A, B, y C. Entre A y B cobran conjuntamente el doble de lo que cobra C y A cobra 20 € euros más que B. ¿Cuánto recibe cada persona?

34. Un señor hizo un viaje en coche en el cual consumió 20 litros de gasolina. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió $\frac{2}{3}$ de la gasolina que tenía en el depósito y en la segunda etapa la mitad de la gasolina que le quedaba. ¿Cuántos litros de gasolina tenía el depósito? ¿Cuántos litros consumió en cada etapa? ¿Cuántos Km recorrió en cada etapa, si el coche consume 5 litros de gasolina a los 100 Km?

35. Dos ciudades A y B distan 720 Km. A las 4 de la mañana sale un coche de la ciudad A hacia la ciudad B con una velocidad de 110 Km/h. A la misma hora sale un camión de la ciudad B hacia la ciudad A con una velocidad de 70 Km/h. ¿A qué hora se encuentran? ¿A qué distancia de las ciudades A y B se encuentran los vehículos?

36. Un comerciante mezcla cierta cantidad de café de 15 euros/kg con otra cantidad de café de 12 euros/kg. Así obtiene 120 kg de café de 13 euros/kg. ¿Qué cantidad de cada clase empleó?

	Peso (kg)	Precio €/kg)	Ganancia (€)
Café superior			
Café inferior			
Mezcla			

37. La suma de dos números es 10 y la razón del menor al mayor es $\frac{1}{4}$. Halla dichos números.

38. La suma de dos números es 300 y el doble del mayor es igual al triple del menor. Halla los dos números.

39. Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si tuviera el padre 30 años menos y el hijo 8 años más, los dos tendrían igual edad. ¿Qué edad tiene cada uno?

40. La edad de un padre es 5 veces mayor que la de su hijo. Dentro de dos años la edad del padre será 4 veces mayor que la del hijo. ¿Qué edad tiene el padre y el hijo?

41. Halla las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendría la edad del menor.

42. La edad de Pedro era el doble que la de Luis hace un año. Cuando pasen 9 años la edad de Pedro será $\frac{4}{3}$ de la edad de Luis. ¿Qué edad tiene actualmente cada uno?

43. Un librero vendió 85 cuadernos a dos precios distintos, unos a 0,4 € y otros a 0,6 €. Obtuvo una ganancia de 43 €. ¿Cuántos cuadernos vendió de cada clase?

44. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Dispone de un total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

45. En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Halla el número de conejos y gallinas que hay en el corral.

46. Un comerciante ha vendido en un día un cierto número de artículos A a un precio de 10 € y un número de artículos B a 15 €. Al final del día tenía en caja un total de 175€. Vendió un total de 15 artículo entre A y B. ¿Cuántos vendió de cada clase?

47. El perímetro de un rectángulo es 28 cm. Halla la longitud de sus lados sabiendo que uno de ellos es $\frac{4}{3}$ del otro.

48. En una población de 6.000 habitantes se han casado en un año el 15% de las mujeres con el 10% de los hombres. Calcula el número de mujeres y de hombres de la localidad.

49. Un jurado está compuesto por hombres y mujeres. El número de mujeres es igual al doble de hombres menos 4. Con dos mujeres menos, el jurado tendría el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres habría en el jurado?

50. Divide 473 en dos partes de modo que al dividir la mayor parte entre la menor se obtenga 7 de cociente y 9 de resto.

51. Las tres cuartas partes de la edad de Susana exceden en 15 años a la edad de David. Hace 4 años la edad de Susana era el doble de la de David. Halla la edad de cada uno.

52. Varios amigos están jugando a los chinos con monedas de 5 y 25 céntimos. Al abrir las manos cuentan 8 monedas con un valor de 140 céntimos. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

53. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mide 80 m y la altura es $\frac{2}{3}$ de la base.

54. Se sabe que el ángulo C de un triángulo tiene 36º más que el B y que el ángulo A es el doble que el B. Halla los valores de los ángulos B y C.

55. Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156€ por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que 1 litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

56. En una reunión hay 22 personas entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños es igual al doble del número de hombres. Si además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

57. En un teatro, hay localidades de tres clases, A, B y C cuyos precios son 50 euros, 100 euros y 120 euros. Cierto día la recaudación total de 94000 euros. Si se sabe, además, que de clase A se vendieron tantas localidades como de las clases B y C juntas, y que de la B se vendió el doble que la de C, averigua cuántas localidades de cada clase se vendieron ese día.

58. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros, y un total de 2000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

59. Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.

60. Una empresa de juguetes fabrica bicicletas, triciclos y coches en los que utiliza un mismo modelo de ruedas. Se sabe que, en los 280 juguetes que va a fabricar, se necesitan 945 ruedas. Si se van a producir 10 bicicletas menos que triciclos.
a) ¿Cuántos coches, bicicletas y triciclos se fabricarán?
b) si las bicicletas se venden a 65€, los triciclos a 75€ y los coches a 90€, ¿cuál es el valor total de los juguetes producidos?

61. En un edificio viven 82 personas en edad de trabajar clasificadas en tres grupos: parados, de baja por enfermedad y activos. Entre esas personas, el número de parados duplica el número que están de baja por enfermedad, mientras que el número de activos es igual a 9 veces el número de los que están de baja más 10.
a) ¿Cuántas personas están en paro?
b) ¿Cuántas personas están de baja por enfermedad?
c) ¿Cuántas personas están activas?

62. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:
1) $x^2 + 1 = 0$ 2) $x^2 - 1 = 0$ 3) $2x^2 - 8 = 0$ 4) $-3x^2 + 27 = 0$
5) $-4x^2 + 9 = 0$ 6) $9x^2 - 25 = 0$ 7) $-3x^2 + 2 = 0$ 8) $3x^2 + 5 = 0$
9) $2x^2 - 18 = 0$ 10) $-3x^2 + 12 = 0$ 11) $5x^2 + 15 = 0$ 12) $3x^2 - 48 = 0$

63. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:
1) $x^2 + x = 0$ 2) $x^2 - x = 0$ 3) $-x^2 + x = 0$ 4) $-x^2 - x = 0$
5) $x^2 + 3x = 0$ 6) $-x^2 + 3x = 0$ 7) $2x^2 + 6x = 0$ 8) $4x^2 - 12x = 0$
9) $-3x^2 + 5x = 0$ 10) $4x^2 - 8x = 0$ 11) $-6x^2 + 14x = 0$ 12) $7x^2 - x = 0$

64. Resuelve las siguientes ecuaciones completas:
1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ 2) $-x^2 + 4x - 3 = 0$ 3) $2x^2 - 5x + 6 = 0$
4) $-3x^2 + x + 2 = 0$ 5) $x^2 + x - 2 = 0$ 6) $x^2 + 3x + 7 = 0$
7) $x^2 - 2x + 1 = 0$ 8) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ 9) $2x^2 + 7x + 8 = 0$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(2x-3)^2}{2} + \frac{x}{3} = 1$ f) $\frac{x^2}{2} - x + 5 = 0$

b) $\frac{65}{8} - x = \frac{1}{x}$ g) $\frac{x+1}{5(x-1)} = \frac{x-1}{2x+1}$

c) $\frac{2(x^2-1)}{3} + \frac{1}{2} = x$ h) $\frac{2(x-4)}{3} + \frac{4}{x} = 1$

d) $\frac{3-x}{1-2x} = \frac{3x-1}{x-2}$ i) $\frac{5x^2}{3} = 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\right)$

e) $\frac{x}{6} - \frac{x^2}{8} = \frac{1}{5} + \frac{3x}{5} - \frac{5x^2}{8}$ j) $\frac{(x-5)^2}{3} + \frac{3x}{4} = 10$

66. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.

67. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida tres números enteros consecutivos. Halla dichos números.

68. Halla dos números positivos cuya diferencia sea 7 y la suma de sus cuadrados 3809.

69. En la ecuación $3x^2 + 5x + c = 0$, hallar el valor de “c” sabiendo que una de las raíces es - 2. Calcular la otra raíz.

70. El área de un rectángulo es 40 cm^2 y la base es 3 cm mayor que la altura. Halla las dimensiones del rectángulo.

71. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y uno de los catetos es 2 cm mayor que el otro. ¿Cuánto miden los dos catetos?

72. La diagonal de un cuadrado mide 10m. Halla los lados del cuadrado.

73. Halla el lado de un cuadrado sabiendo que si se aumentan 2 cm a cada uno de sus 4 lados, el área aumenta 16 cm^2

74. Se tiene un terreno rectangular de 2700 m^2 de superficie. ¿Cuáles serán sus dimensiones sabiendo que su perímetro mide 210m?

75. Preguntada una persona por su edad, responde: si del cuadrado de mi edad se quitan los dos tercios, los tres cuartos y los once sextos de la misma, lo que queda es igual a 20 veces mi edad más 18. Calcular su edad.

76. Halla dos números impares consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 970.

77. Problema del bambú. (Texto indio del siglo IX). Un bambú que mide 30 codos y que se eleva sobre un terreno plano se rompe en un punto por la fuerza del viento. Su extremidad toca al suelo a 16 codos de su pie. ¿A qué altura se ha roto?

78. Problema de la fuente (Leonardo de Pisa). Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40, están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que descienden dos pájaros que están en las almenas de las torres. Yendo con igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?

79. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x-\sqrt{2x+3}=$ -x – 1 b) $\sqrt{x}+2=x$

c) $\sqrt{4x+5}=x+2$ d) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

e) $x+\sqrt{5x+10}=8$

80. En una reunión, hay 60 personas entre altas, medianas y bajas. Se sabe que entre las bajas y las medianas duplican el número de altas. También se sabe que las altas y el doble de las medianas son el doble de las bajas. ¿Cuántas personas hay de cada estatura?

81. La habitación 400 de un hotel tiene forma rectangular: mide el doble de largo que de ancho. La habitación 401 también es rectangular: mide de ancho lo mismo que la habitación 400 y de largo 1 metro más que de ancho. El área de la habitación 401 es 6 m^2 menor que la habitación 400. Calcular las dimensiones de la habitación 400.

82. En una estantería hay 48 novelas, juntando las policíacas, las de ciencia-ficción y las históricas. Se sabe que hay el doble de históricas que de ciencia-ficción y que el número de novelas policíacas es el triple de las que hay entre los otros dos géneros juntos. ¿Cuántas novelas hay de cada género?

TEMA 5: TRIGONOMETRÍA

1. INTRODUCCIÓN.

¿Cuál es la altura de la Iglesia de San Francisco de Alcázar de San Juan?
Si estamos en una de las orillas de las Lagunas de Villafranca, ¿podríamos calcular la anchura de dichas Lagunas?

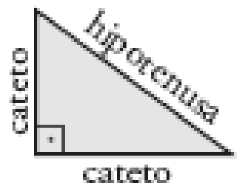
Estas dos preguntas se pueden responder haciendo uso de la trigonometría. No hay más que utilizar una cinta métrica y un teodolito (medidor de ángulos)

La **trigonometría** (del griego, *la medición de los triángulos*) es una rama de las matemáticas que estudia los ángulos, triángulos y las relaciones entre ellos.
Posee muchas aplicaciones. Las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas; en geografía para medir distancias entre puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

1.1 TEOREMAS

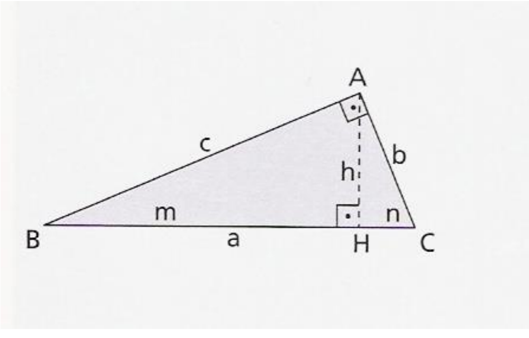
Sólo pueden aplicarse a los triángulos rectángulos. El triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto y los otros dos agudos.
Los lados que forman el ángulo recto reciben el nombre de “catetos” y el tercer lado lo llamamos “hipotenusa”.

Teorema de Pitágoras



El teorema de Pitágoras, establece una relación entre los tres lados del triángulo rectángulo de la forma siguiente:
El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los catetos.
Si llamamos “b” y “c” a los catetos y “a” a la hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Teorema del cateto

El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

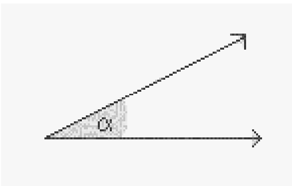
$b^2 = a \cdot n$, o bien, $c^2 = a \cdot m$

Teorema de la altura

El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

2. DEFINICIÓN DE ÁNGULO. UNIDADES DE MEDIDA.



Un **ángulo** es el espacio comprendido entre dos semirrectas que tienen el mismo origen.
Las semirrectas que lo determinan se llaman **lados,** y el punto donde se unen los lados se llama **vértice**.
Para medir el ángulo podemos usar diferentes sistemas de medidas:

Grados Sexagesimales: el ángulo completo tiene 360 grados sexagesimales (360º)

Radianes: el ángulo completo mide 2π radianes. El radián, en las aplicaciones físicas, es más práctico y directo que los grados.
La equivalencia entre los dos sistemas: 360º sexagesimales = 2π radianes.

EJEMPLO

Si queremos expresar en radianes un ángulo dado en grados sexagesimales, o viceversa, no hay más que aplicar una regla de tres.

$$\left.\begin{array}{lcl} 360º & \longrightarrow & 2\pi \text{ radianes} \\ 90º & \longrightarrow & x \text{ radianes} \end{array}\right\} \qquad x = \frac{90 \cdot 2\pi}{360} = \frac{180\pi}{360} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

es decir: 90º = $\frac{\pi}{2}$ radianes

CON LA CALCULADORA CIENTÍFICA PUEDE ELEGIRSE EL SISTEMA DE MEDIDA SELECCIONANDO:

Deg $\longrightarrow$ trabajamos con grados
Rad $\longrightarrow$ trabajamos con radianes

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

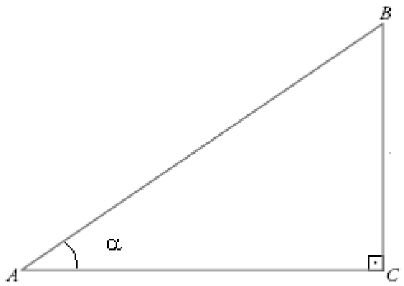
Consideremos el triángulo rectángulo ABC, recto en C. Sea α el ángulo de vértice A.

Definimos las razones trigonométricas del ángulo α:

Seno de α $\quad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{BC}{AB}$

Coseno de α $\quad \cos\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{AC}{AB}$

Tangente de α $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto contiguo } \alpha} = \dfrac{BC}{AC}$

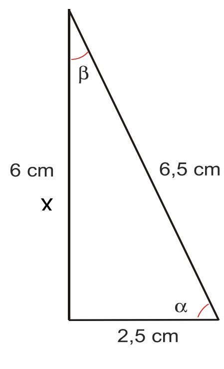


3.1. PROPIEDADES:

a) Las razones trigonométricas dependen únicamente del ángulo, pero no del triángulo.
b) El seno y el coseno de un ángulo son números comprendidos entre –1 y 1.
c) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
d) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

EJEMPLO

Calculamos las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo en el que uno de sus catetos mide 2,5cm y la hipotenusa 6,5cm.



Llamamos x a la longitud del otro cateto y calculamos su valor aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 + 2'5^2 = 6'5^2 \Longrightarrow x^2 + 6'25 = 42'25 \Longrightarrow x^2 = 36 \Longrightarrow x = 6\text{cm}$

Calculamos las razones trigonométricas de α:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{6'5} \cong 0'92$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{2'5}{6'5} \cong 0'38$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{2'5} \cong 2'4$

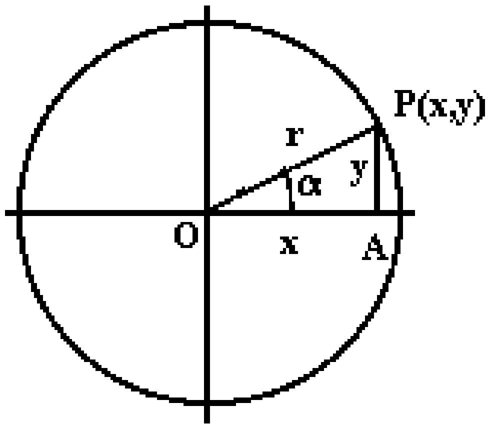
Calculamos las razones trigonométricas de β:

$\operatorname{sen}\beta = \frac{2'5}{6'5} \cong 0'38$ $\qquad$ $\cos\beta = \frac{6}{6'5} \cong 0'92$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{2'5}{6} \cong 0'42$

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Dada una circunferencia de radio r, si tomamos un arco AP, donde A es un punto del semieje positivo de las x y P(x,y) el punto del extremo, se definen las razones trigonométricas del ángulo α en la forma:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$



A partir de estas razones, se definen sus inversas:

$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cosecante}\alpha = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$

$\frac{1}{\cos\alpha} = \operatorname{secante}\alpha = \sec\alpha = \frac{r}{x}$

$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotangente}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y}$

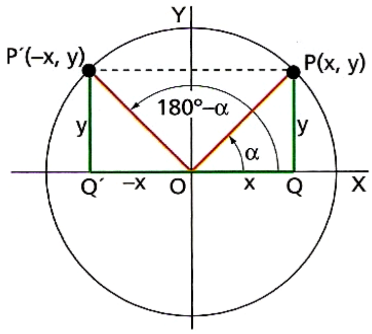
4.1. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES DE CIERTOS ÁNGULOS

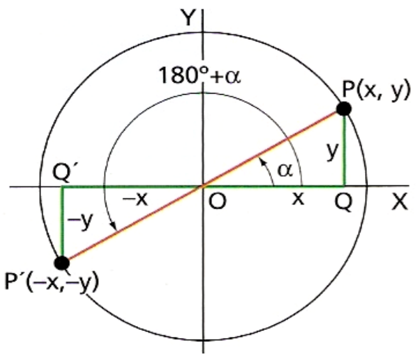
Ángulos suplementarios: α y $180^{o}-\alpha$

$\operatorname{sen}(180^{o}-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(180^{o}-\alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^{o}-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$





Ángulos que difieren en 180º: α y $180^{o}+\alpha$

$\operatorname{sen}(180^{o}+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(180^{o}+\alpha) = -\cos\alpha$

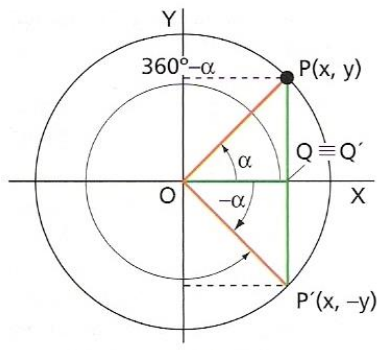
$\operatorname{tg}(180^{o}+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Ángulos opuestos: α y $-\alpha$

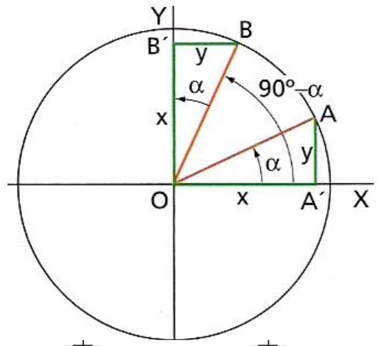
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$



Ángulos complementarios: $\alpha \; y \; 90º - \alpha$



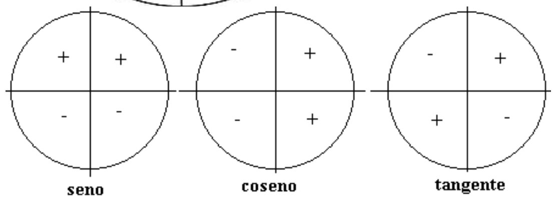
$sen(90º - \alpha) = \cos \alpha$

$\cos(90º - \alpha) = sen\alpha$

$tg(90º - \alpha) = \cot g\alpha$

5. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

En cada cuadrante, dependiendo del signo de las abscisas y ordenadas, las razones presentan los siguientes signos:



6. OBTENCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS MEDIANTE LA CALCULADORA

Puedes hacer uso de tu calculadora para obtener una buena estimación del valor de la tangente, el coseno y el seno de un ángulo utilizando la teclas tan, cos y sin.

En primer lugar hay que verificar que la calculadora está en modo DEG (grados sexagesimales) o RAD (si tenemos el valor del ángulo expresado en radianes)

1. Cálculo de la razón trigonométrica de un ángulo.

Para calcular el seno: tecla SIN, valor del ángulo, signo =

Para calcular el coseno: tecla COS, valor del ángulo, signo =

Para calcular la tangente: tecla TAN, valor del ángulo, signo =

2. Cálculo de un ángulo conocida una de las razones trigonométricas.

Conocido el seno: tecla SHIFT, tecla SIN, valor del seno, signo =

Conocido el coseno: tecla SHIFT, tecla COS, valor del coseno, signo =

Conocida la tangente: tecla SHIFT, tecla TAN, valor de la tangente, signo =

3. Cálculo de una razón trigonométrica conocida otra

Vamos a verlo con un ejemplo:

Sabemos que sen α = 0’5 y necesitamos conocer el valor de la tg α

Tecleamos SHIFT SIN 0’5 = sale en la pantalla 30. Seguidamente teclea TAN ANS y el resultado obtenido es el valor de la tangente de un ángulo cuyo seno es 0’5

7. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos (lados o ángulos) a partir de algunos elementos conocidos.

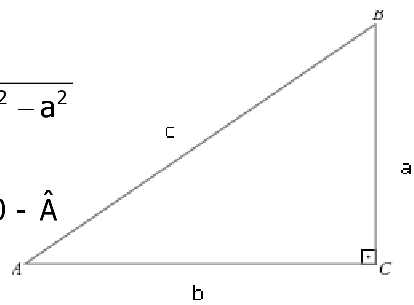
Las razones trigonométricas nos permiten resolver cualquier tipo de triángulo rectángulo.

7.1. CONOCIDOS DOS LADOS.

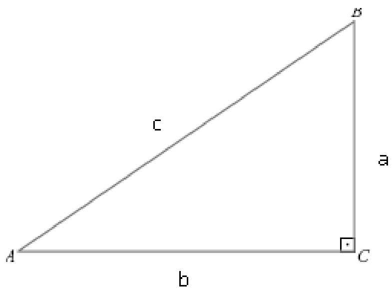
Por ejemplo, conocemos los lados a y c: $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{c}$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

El lado b se calcula por el Teorema de Pitágoras.

El ángulo Â se calcula con la calculadora y el ángulo $\hat{B} = 90 - \hat{A}$



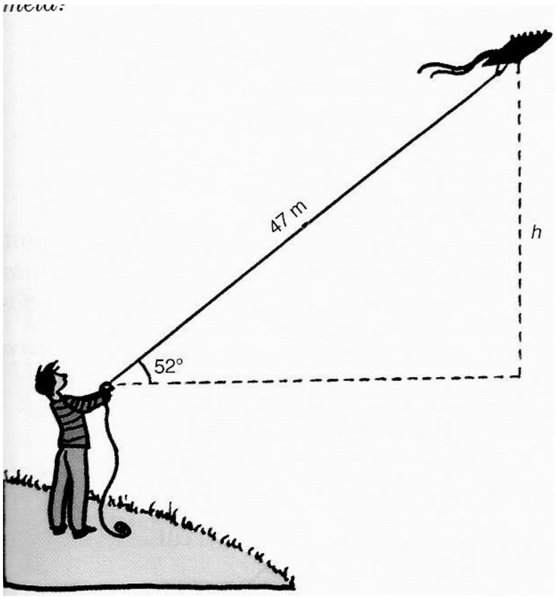
7.2. CONOCIDOS UN LADO Y UN ÁNGULO.



Conocemos el ángulo B y el lado a:

$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = \frac{a}{\cos \hat{B}} \qquad \hat{A} = 90º - \hat{B} \qquad b = a \cdot tg\, \hat{B}$

EJEMPLO



Alfonso está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya 47m de hilo y averigua que el ángulo que forma la cuerda de la cometa con la horizontal es de 52º. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

Llamamos h al cateto opuesto al ángulo conocido. El hilo, cuya longitud conocemos, es la hipotenusa. Por tanto, la razón trigonométrica que debemos usar es el seno:

$$\text{sen } 52º = \frac{h}{47} \Rightarrow h = 47 \cdot \text{sen } 52º = 47 \cdot 0'788 = 37'036 \text{ m}$$

Así, la cometa está a unos 37m de altura

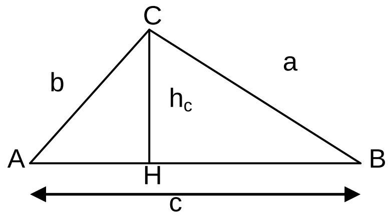
8. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS
8.1. TEOREMA DE LOS SENOS

El teorema de los senos sirve para relacionar los lados de un triángulo cualquiera con los ángulos opuestos y dice así:

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Sea el triángulo ABC y h_c la altura correspondiente al vértice C. Los triángulos AHC y BHC son rectángulos, entonces:



$$\left. \begin{array}{l} h_c = b \cdot sen\hat{A} \\ h_c = a \cdot sen\hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow b \cdot sen\hat{A} = a \cdot sen\hat{B} \Rightarrow \frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}}$$

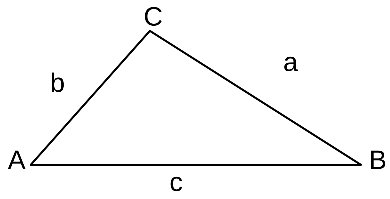
Del mismo modo, si trazamos la altura correspondiente al vértice A, se obtiene

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

EJEMPLO

Dado un triángulo conocemos el lado b = 69m y los ángulos A = 65º y C = 32º. ¿Cuánto mide el lado a?

Para poder aplicar el teorema de los senos necesitamos conocer el ángulo B, pero eso es fácil ya que conocemos los otros dos ángulos:



B = 180º – (65º+32º) =180º-97º=83º

Ahora podemos relacionar los lados a y b con los ángulos A y B:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{sen65º} = \frac{69}{sen83º} \Rightarrow a = 69\frac{sen65º}{sen83º} = 63m$$

8.2. TEOREMA DEL COSENO

El teorema del coseno dice que en todo triángulo se verifica que:

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

EJEMPLO

Los lados de un triángulo son: $a = \sqrt{2}$, b = 1 y c = 1. Hallar el ángulo A.

Aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{1+1-2}{2\cdot 1\cdot 1} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90º$$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

1. Expresa en radianes los siguientes grados sexagesimales:

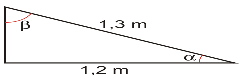
a) 45º	b) 225º	c) 360º	d) 30º
e) 135º	f) 270º	g) 25º	h)120º

2. Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $\frac{2\pi}{5}$ rad c) $\frac{3\pi}{2}$ rad

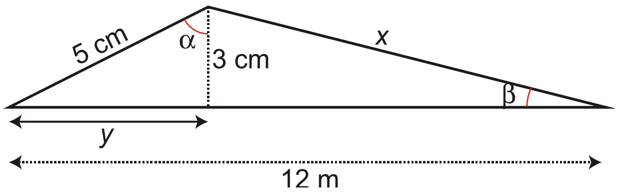
d) $\frac{\pi}{3}$ rad e) $\frac{2\pi}{3}$ rad f) $\frac{5\pi}{4}$ rad

3. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo de la figura:

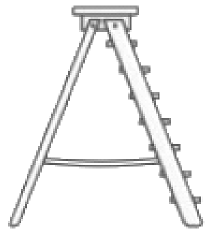


4. a) Calcula x e y en el triángulo:

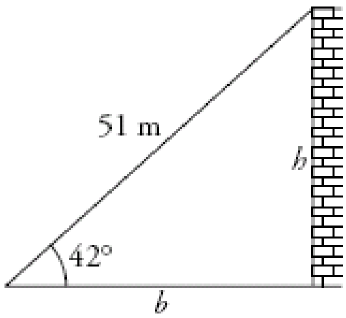
b) Halla el seno, el coseno y la tangente de los ángulos α y β

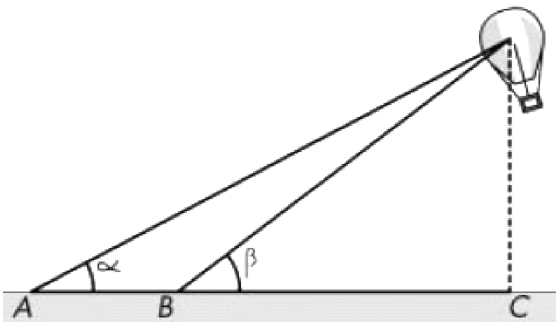


5. Un carpintero quiere construir una escalera de tijera cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60°. Para que la altura de la escalera, estando abierta, sea de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo?

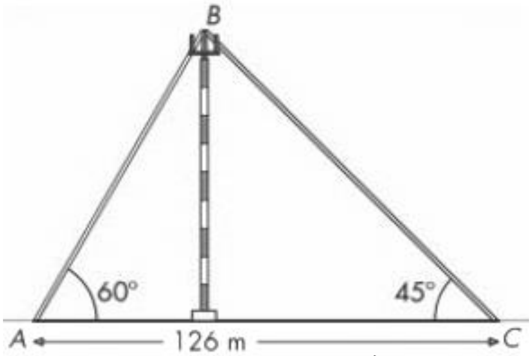


6. Víctor y Ramón quieren saber la altura a la que se encuentra el campanario de la iglesia de su pueblo. Para ello, Víctor sube al campanario y lanza el extremo de una cuerda hacia afuera. El pie de la torre no es accesible. Ramón se aleja con la cuerda hasta que queda tensa y la clava en el suelo. Forma un ángulo de 42º. La cuerda mide 51 metros.
a) ¿A qué altura está el campanario?
b) ¿A qué distancia se encuentra Ramón de la base del campanario?





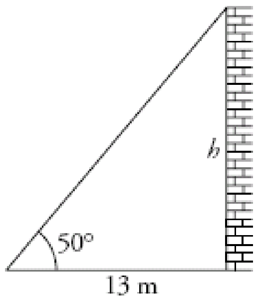
7. Para hallar la altura a la que se encuentra un globo, procedemos del siguiente modo: Rosa se coloca en un punto B, y yo en un punto A, a 5 metros de ella, de tal forma que los puntos A, B y C (observa la figura) quedan alineados. Si los ángulos α y β miden 40º y 50º, respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?

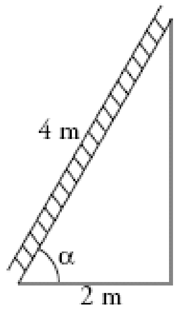


8. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos tirantes de cable de acero, como indica la figura.
Calcula:
a) La altura de la antena.
b) La longitud de los cables.
c) El valor del ángulo ABC

9. En un triángulo ABC, calcula $\overline{BC}$ conociendo $\overline{AB} = 37$ cm, $\overline{AC} = 50$ cm y $\widehat{BAC} = 32º$.

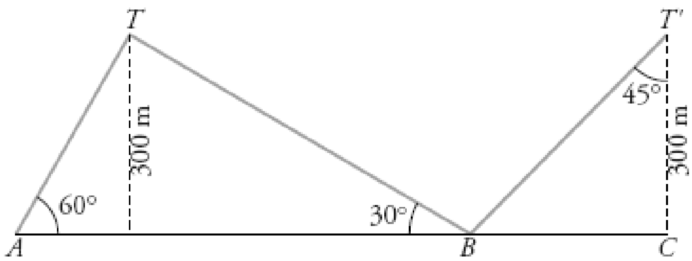
10. Calcula la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50º con el suelo.



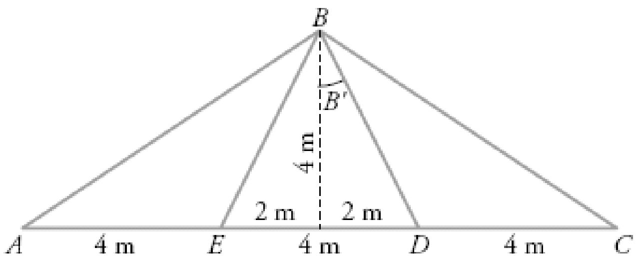


11. Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?

12. Una línea de alta tensión pasa por dos transformadores, T y T'. Este es un plano de la línea:



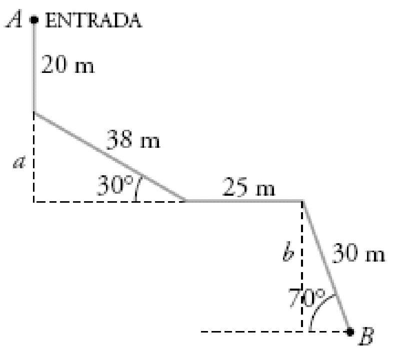
Calcula las longitudes de los tres tramos de cable.



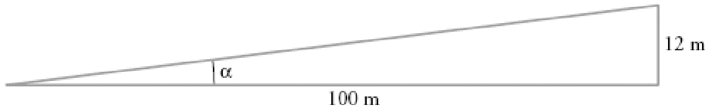
13. Una estructura metálica tiene la forma y dimensiones de la figura.

Halla la longitud de los postes AB y BE y la medida de los ángulos A, C, EBD y ABC.

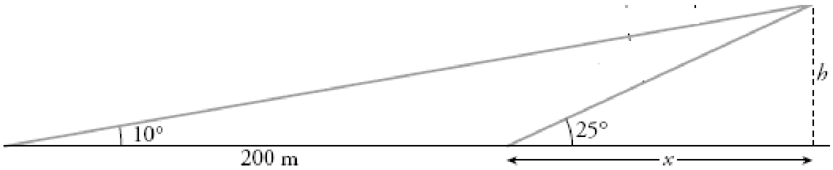
14. Los espeleólogos utilizan un carrete para medir la profundidad. Sueltan hilo del carrete y miden la longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Halla la profundidad del punto B.



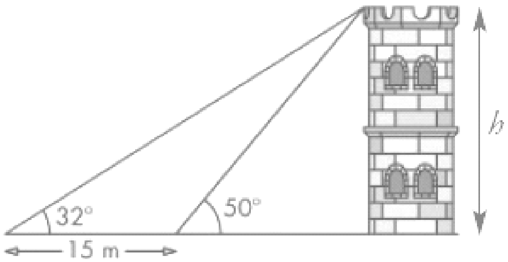
15. Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?

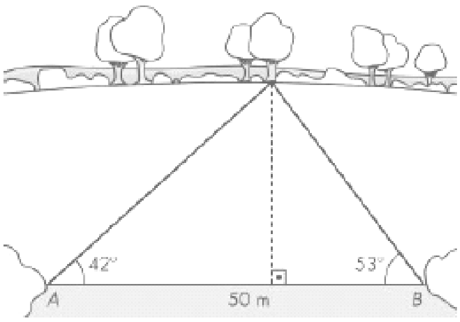


16. Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:
• El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25º.
• Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10º.



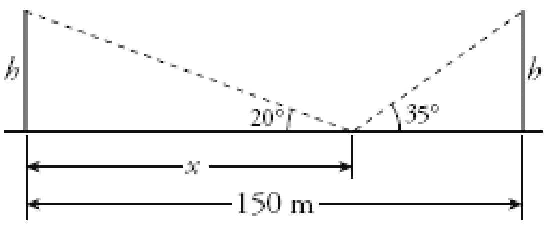
17. Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32º con la horizontal. Si me acerco 15 m, el ángulo es de 50º. ¿Cuál es la altura de la torre?

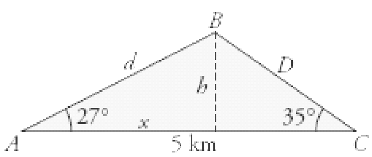




18. Observa las medidas que ha tomado Juan para calcular la anchura del río. Calcula cuántos m mide de ancho.

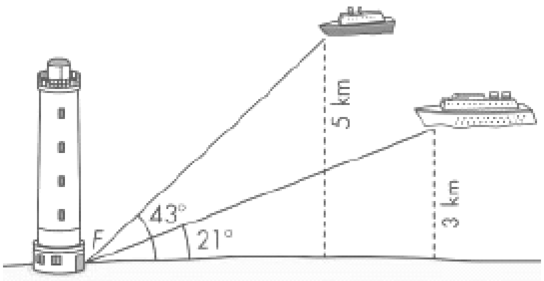
19. Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35º y 20º. ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?

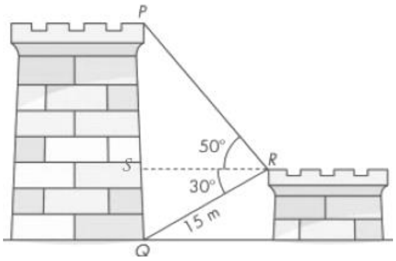




20. En dos comisarías de policía, A y C, se escucha la alarma de un banco B. Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.

21. Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y el barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa y el B a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.





22. Si $\overline{QR} = 15$ m, ¿cuál es la altura de la torre, $\overline{PQ}$?

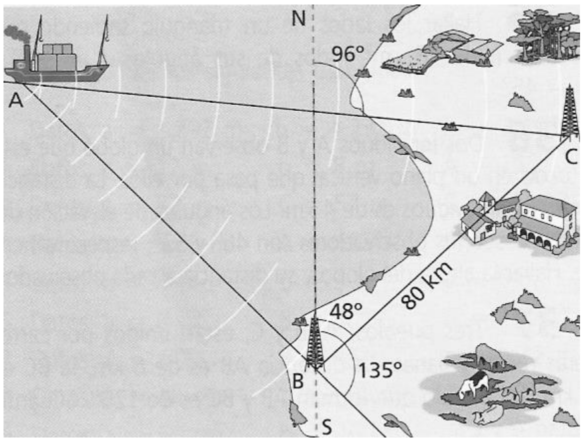
23. Los padres de Luis han heredado una parcela de forma triangular cuyos lados miden 15, 22 y 17 m. Luis quiere calcular los ángulos, pero no sabe. ¿Podríamos ayudarle?

24. En un triángulo se conoce un lado a = 6m y los ángulos B = 45º y C = 105º. Calcular los restantes elementos.

25. Un solar tiene forma triangular. Se han podido determinar dos lados que miden 10 y 7 dm, respectivamente, y el ángulo comprendido se ha medido con un teodolito y resultó ser igual a 30º. Para poder replantear una posible construcción se necesita conocer el resto de los elementos del triángulo. Calcúlalos.

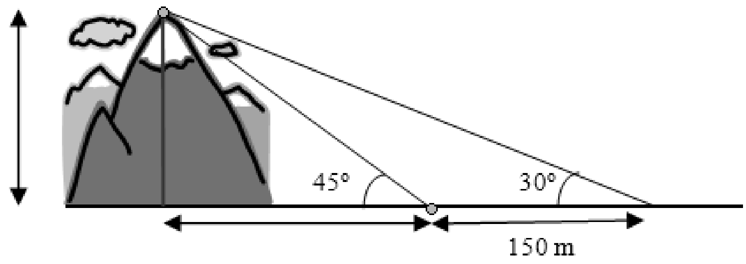
26. Jorge, desde su casa, ve la fuente que está en el centro de la plaza Mayor y el castillo; ha preparado un teodolito casero para calcular el ángulo formado por dichas visuales y ha dado 40º32'. La distancia de su casa a la fuente es 42 dm y la distancia de la fuente al castillo es 32 dm. Si hubiera un camino directo desde la casa de Jorge al castillo, ¿cuánto mediría?

27. Un barco A pide socorro y las señales son recibidas por dos estaciones de radio B y C que distan entre sí 80 km. La recta que une B y C forma con la dirección norte un ángulo de 48º. B recibe señales con una dirección de 96º con el norte. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



28. Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 17º. Aproximándose 25,8 m hacia la orilla en la dirección del árbol, el ángulo es de 31º. Calcular la altura del árbol.

29. Calcula la altura de la montaña con los datos que aparecen en el dibujo:



30. Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de 30º

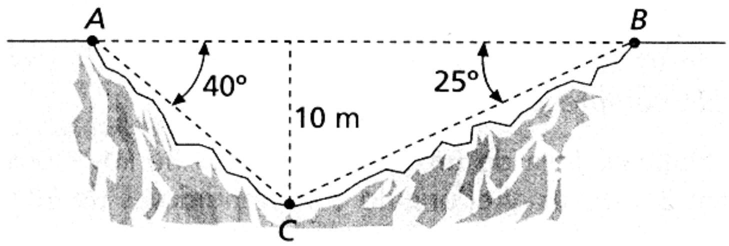
31. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo es de 60º. Halla la altura de la torre.

32. Desde un punto A se ve el punto más alto de una torre bajo un ángulo de 40º. Si se retrocede 40 m, se ve bajo un ángulo de 30º. Halla la altura de la torre.

33. Un barco B pide socorro y se reciben las señales en dos estaciones de radio, A y C que distan entre si *50 km. Desde* las estaciones se miden los siguientes ángulos: A=46º y C=53º. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

34. Una antena de radio está sujeta por dos cables que van desde la parte más alta al suelo. Los puntos de sujeción de los cables y el pie de la antena están alineados. Se han medido los ángulos que forma la horizontal con cada uno de los cables y son 30º y 60º. Sabiendo que la distancia entre los pies de los cables es de 60 metros, calcular la altura de la antena.

35. Desde los extremos A y B de un barranco, que están a la misma altura, se observa un punto C del fondo del barranco con ángulos de 40º y 25º respecto a la dirección AB, como ilustra el siguiente dibujo. Si la profundidad del barranco es de 10 m, halla la longitud de un puente que une los puntos A y B.



36. Para medir la altura de una torre, nos situamos en un cierto punto y medimos el ángulo con el que se ve la parte más alta, obteniendo un valor de 60º20’. Nos alejamos en línea recta 50 m. y volvemos a medir el ángulo, obteniendo ahora un valor de 32º11’. Halla la altura de la torre.

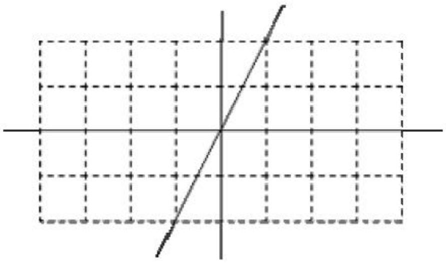
37. La visual dirigida desde un punto del suelo a la copa de un árbol forma con la horizontal un ángulo de 22º 30’. Tras acercarse 5 m. en línea recta hacia el árbol, la visual pasa a formar un ángulo de 31º. Calcula la altura del árbol.

TEMA 6: FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. TABLAS DE DATOS Y GRÁFICAS.

El lenguaje natural, el que usamos para comunicarnos con los demás, puede ser traducido a lenguaje algebraico y usar el álgebra para la resolución de problemas.
También podemos utilizar el lenguaje gráfico para traducir expresiones algebraicas y así dar respuestas de un modo sencillo y rápido.

Un coreano que no supiese español no entendería: “el doble de algo”, sin embargo podría entender: “2x” y también entendería:



Podemos decir, sin ninguna duda, que el lenguaje de las funciones y sus gráficas enriquece de forma rotunda nuestras posibilidades de comunicación.

1.1. Tabla de datos

Una tabla es una representación de datos, mediante pares ordenados. Expresan la relación existente entre dos magnitudes o dos situaciones.
La siguiente tabla nos muestra la variación del precio de las patatas, según el número de kilogramos que compremos.

Kg de patatas	1	2	3	4	5
Precio en €	2	4	6	8	10

La siguiente tabla nos indica el número de alumnos que consiguen una determinada nota en un examen:

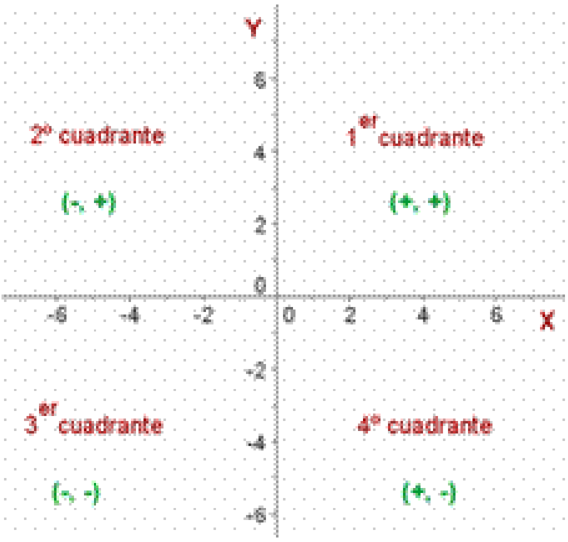
Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos	1	1	2	3	6	11	12	7	4	2	1

1.2. Ejes de coordenadas

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes iguales y a cada una de ellas se les llama cuadrante.

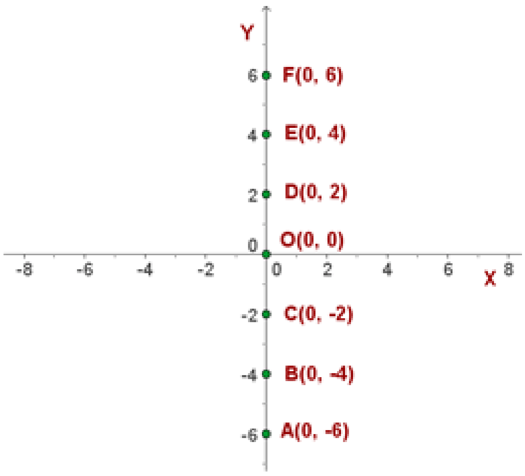
Signos

	Abscisa(x)	Ordenada(y)
1º cuadrante	+	+
2º cuadrante	-	+
3º cuadrante	-	-
4º cuadrante	+	-

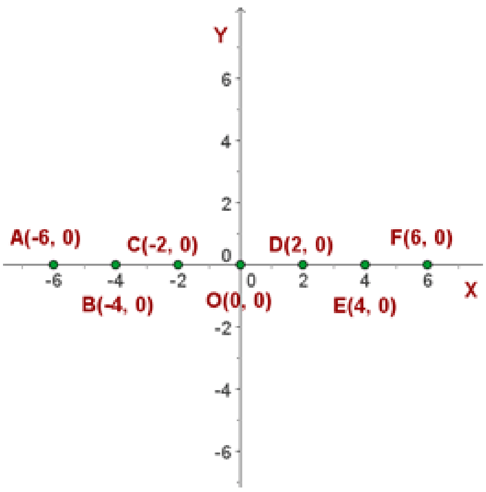


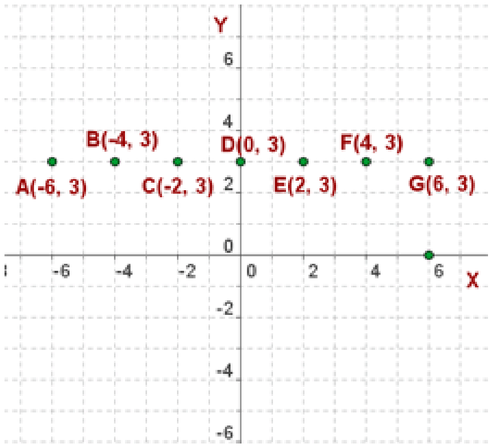
El origen de coordenadas, O, tiene de coordenadas: O (0, 0).

Los puntos que están en el eje de ordenadas tienen su abscisa igual a 0.

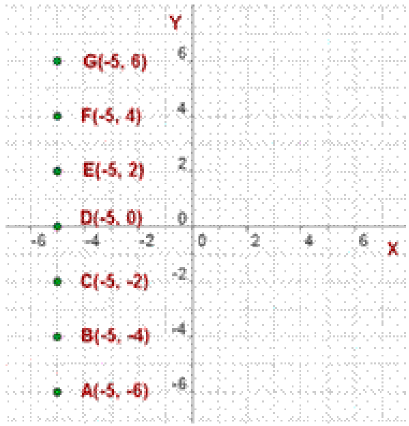


Los puntos situados en el eje de abscisas tienen su ordenada igual a 0.





Los puntos situados en la misma línea horizontal (paralela al eje de abscisas) tienen la misma ordenada.

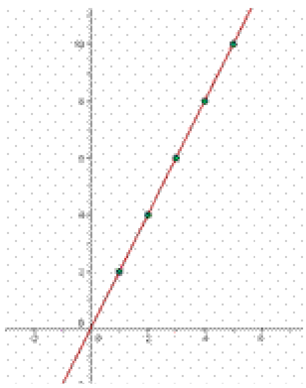


Los puntos situados en una misma línea vertical (paralela al eje de ordenadas) tienen la misma abscisa.

1.3. Gráficas

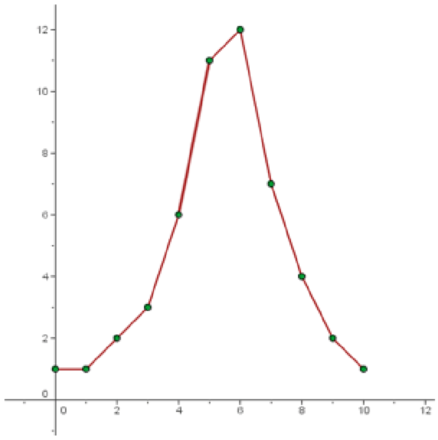
Una gráfica es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla. Las gráficas describen relaciones entre dos variables. La variable que se representa en el eje horizontal se llama variable independiente o variable **x**. La que se representa en el eje vertical se llama variable dependiente o variable **y**. La variable **y** está en función de la variable **x**.
Una vez realizada la gráfica podemos estudiarla, analizarla y extraer conclusiones.
Para interpretar una gráfica hemos de observarla de izquierda a derecha, analizando cómo varía la variable dependiente, **y**, al aumentar la variable independiente, **x**.

Kg de patatas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Precio en €	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**



En la gráfica anterior podemos observar que a medida que compramos más kilos de patatas el precio se va incrementando

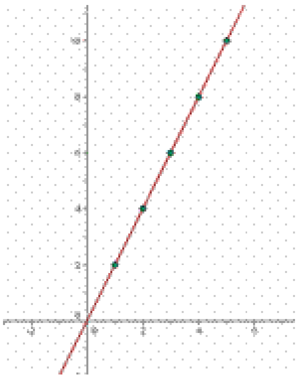
Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos	1	1	2	3	6	11	12	7	4	2	1

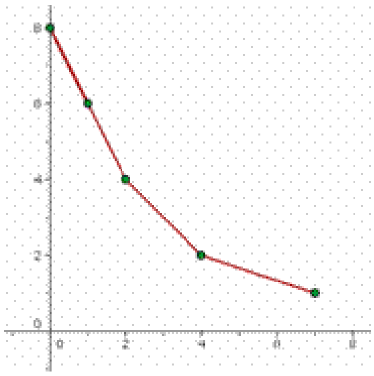


En esta gráfica observamos que la mayor parte de los alumnos obtienen una nota comprendida entre 4 y 7.

1.3.1. Tipos de gráficas

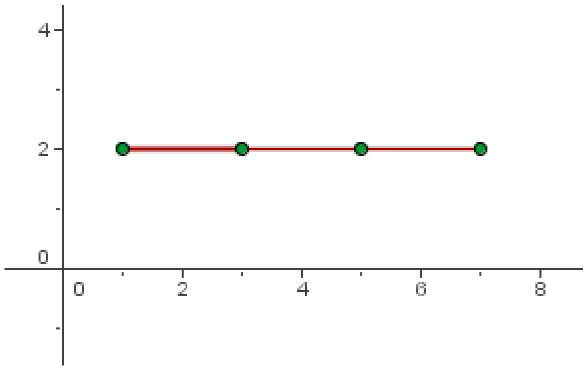
a) **Gráfica creciente**.
Una gráfica es creciente si al aumentar la variable independiente aumenta la otra variable.

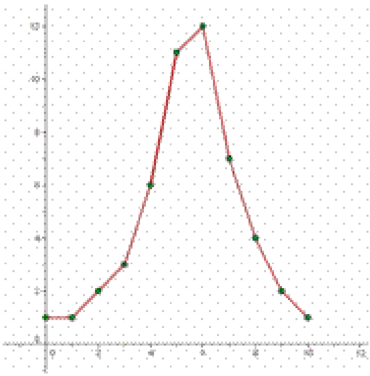




b) **Gráfica decreciente**.
Una gráfica es decreciente si al aumentar la variable independiente disminuye la otra variable.

c) **Gráfica constante**.
Una gráfica es constante si al variar la variable independiente la otra permanece invariable.





Una gráfica puede tener a la vez partes crecientes y decrecientes.

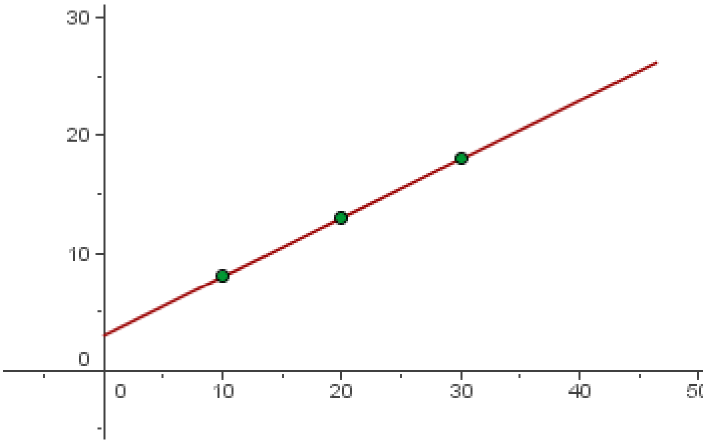
2. FUNCIONES

Una función es una relación entre dos magnitudes, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, llamada imagen.

Ejemplo:
El precio de un viaje en taxi viene dado por:

$$y = 3 + 0,5\,x$$

Siendo x el tiempo en minutos que dura el viaje.
Como podemos observar la función que relaciona dos variables: x e y.
x es la variable independiente e y es la variable dependiente (depende de los minutos que dure el viaje).
Las funciones se representan sobre unos ejes cartesianos para estudiar mejor su comportamiento.



x	10	20	30
y= 3 + 0,5x	8	13	18

Existen varios tipos de funciones. Nosotros estudiaremos la función lineal, la cuadrática, la de proporcionalidad inversa y la exponencial

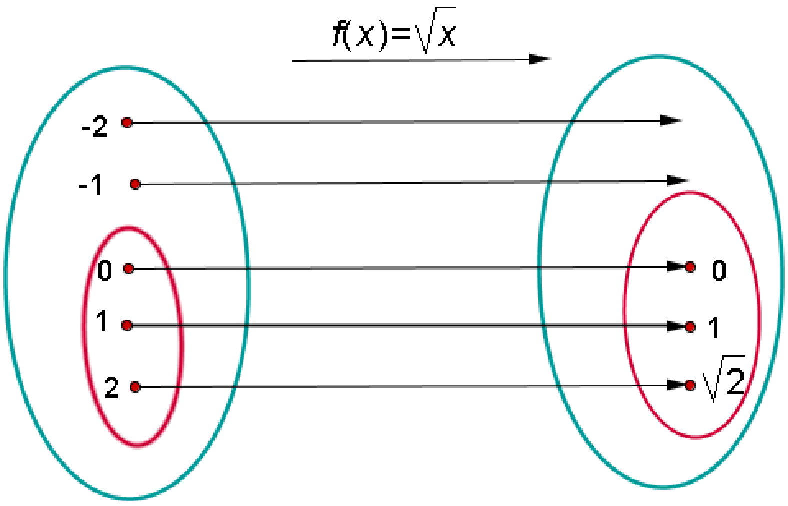
2.1. Concepto de función

Dados dos conjuntos A y B, llamamos **función** a la **correspondencia de A en B** en la cual **todos los elementos de A tienen a lo sumo una imagen en B, es decir una imagen o ninguna**.
Función real de variable real es toda correspondencia f que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto de números reales, llamado dominio, otro número real.

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = y$$

El subconjunto en el que se define la función se llama **dominio o campo de existencia de la función**. Se designa por D.
El número **x** perteneciente al **dominio** de la función recibe el nombre de **variable independiente**.
Al número **y, asociado por f al valor x, se le llama variable dependiente**. **La imagen de x se designa por f(x)**.
Luego **y= f(x)**
Se denomina **recorrido** de una función al **conjunto de los valores reales que toma la variable y o f(x)**.

$$x \longrightarrow \sqrt{x}$$



Conjunto inicial — **Dominio**

Conjunto final — **Conjunto imagen o recorrido**

2.1.1. Dominio de una función

El dominio es el conjunto de elementos que tienen imagen.

$$\mathbf{D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, f(x)\}}$$

El recorrido es el conjunto de elementos que son imágenes.

$$\mathbf{R = \{f(x) \,/\, x \in D\}}$$

Estudio del dominio de una función

- **Dominio de la función polinómica entera**

El dominio es R, cualquier número real tiene imagen.

$$f(x)= x^2 - 5x + 6 \qquad \mathbf{D=R}$$

- **Dominio de la función racional**

El dominio es R menos los valores que anulan al denominador (no puede existir un número cuyo denominador sea cero).

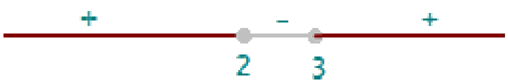
$$f(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x+6} \qquad x^2-5x+6=0 \qquad D=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

- **Dominio de la función irracional**

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

$$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$$

$$\boxed{x^2-5x+6\geq 0 \qquad D=(-\infty,2]\cup[3,\infty)}$$

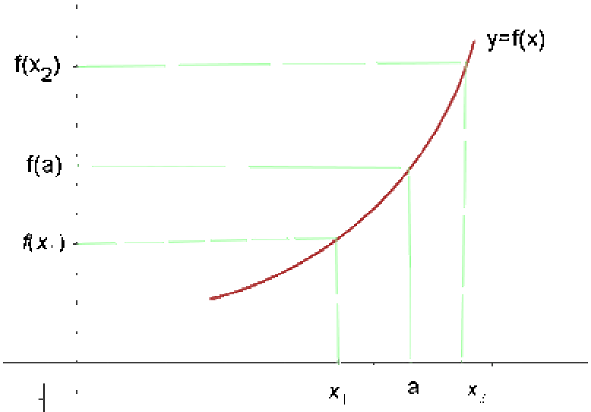


2.1.2. Estudio de una función

- **Crecimiento y decrecimiento**

Función estrictamente creciente

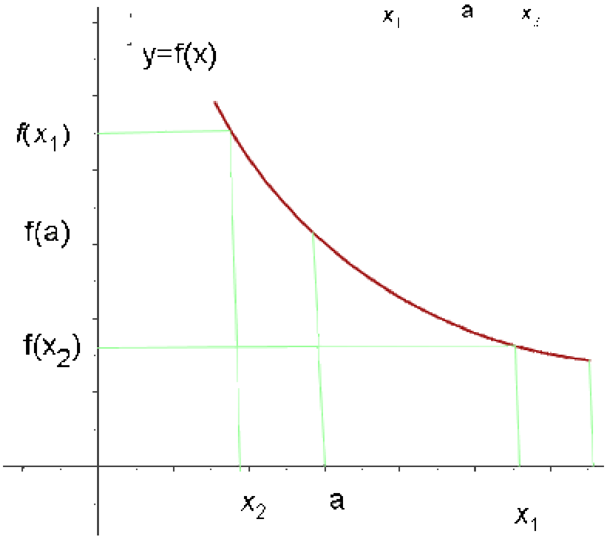
f es estrictamente creciente en a sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca la entorno de a se cumple:



$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$
$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

Función estrictamente decreciente

f es estrictamente decreciente en a sólo si existe un entorno de a, tal que para toda x que pertenezca al entorno de a se cumple:

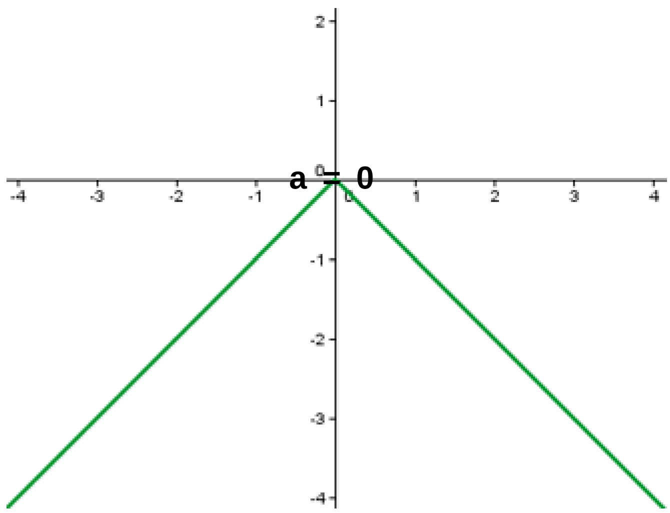


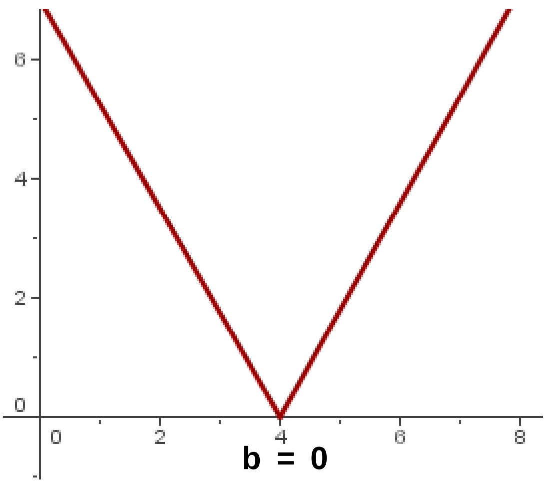
$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$
$$x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

- **Máximos y mínimos absolutos y relativos**

Máximo absoluto

Una función tiene su máximo absoluto en el x = a si la ordenada es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.





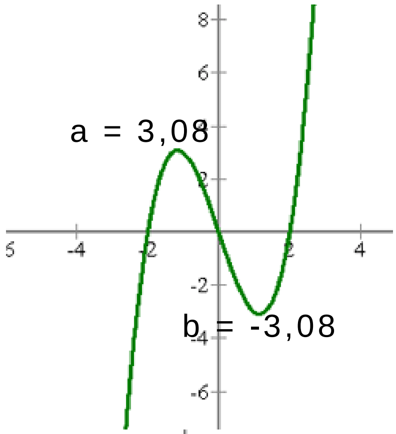
Mínimo absoluto

Una función tiene su mínimo absoluto en el x = b si la ordenada es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.

Máximo y mínimo relativo

Una función f tiene un máximo relativo en el punto a, si f(a) es mayor o igual que los puntos próximos al punto a.

Una función f tiene un mínimo relativo en el punto b, si f(b) es menor o igual que los puntos próximos al punto b.

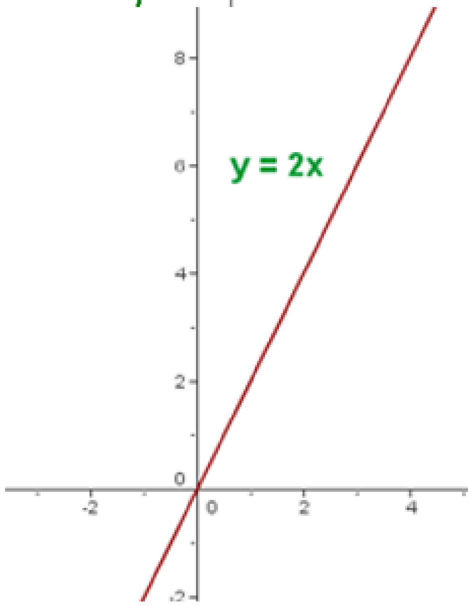


3. FUNCIÓN LINEAL

La función lineal es del tipo: y = mx

Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. Ejemplo: y = 2x

x	0	1	2	3	4
y = 2x	0	2	4	6	8

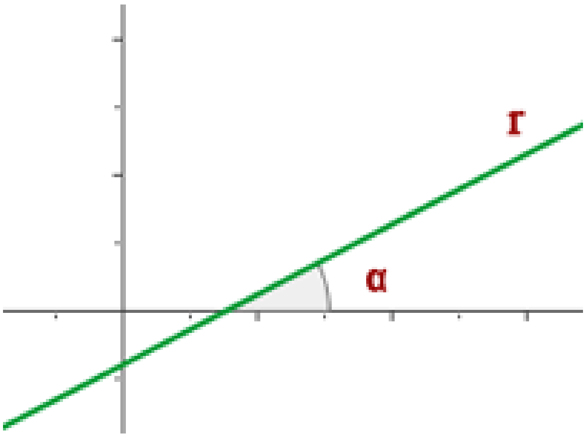


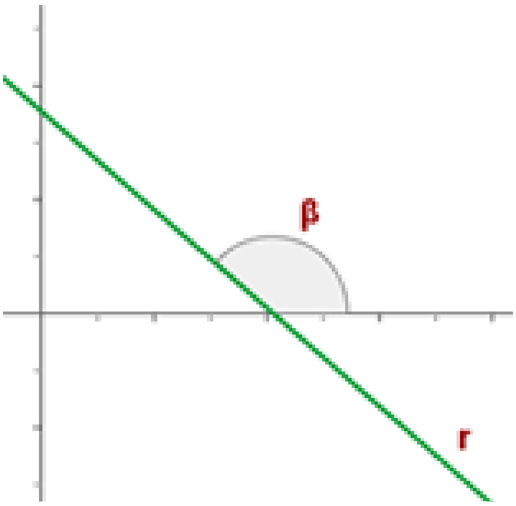
Pendiente

La pendiente es la **inclinación** de la recta con respecto al eje de abscisas.

Si m > 0 la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo.

$m = tg\alpha$

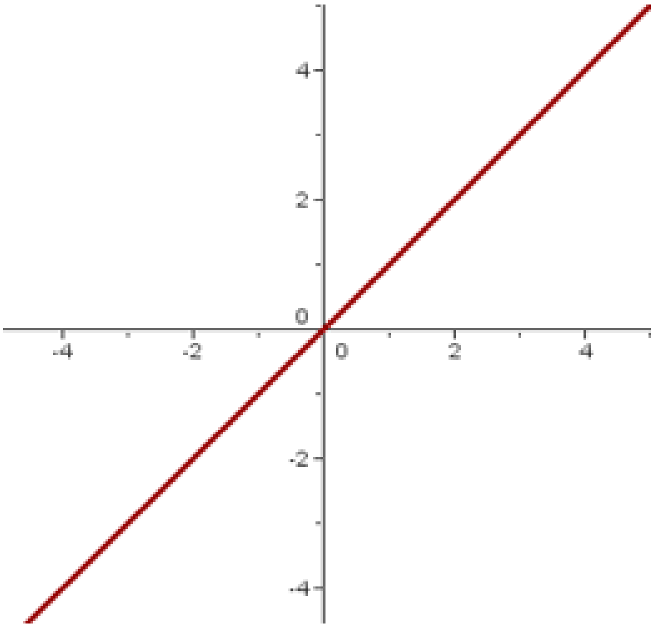




Si m < 0 la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso.

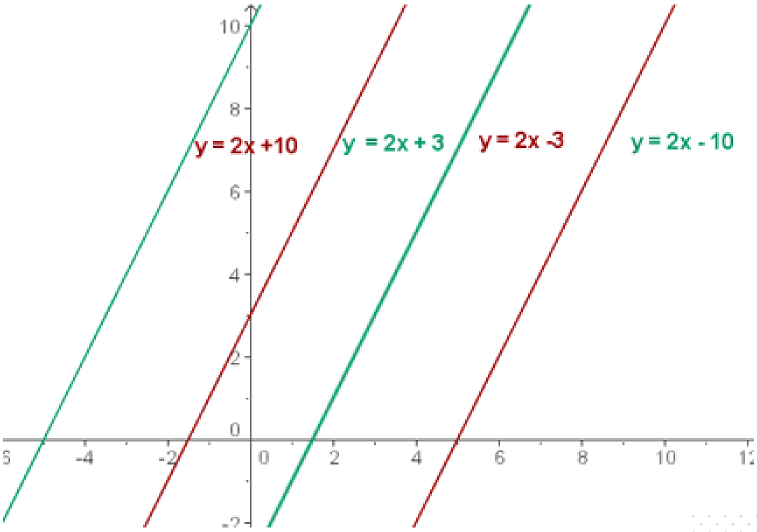
$m = 180º + tg\beta$

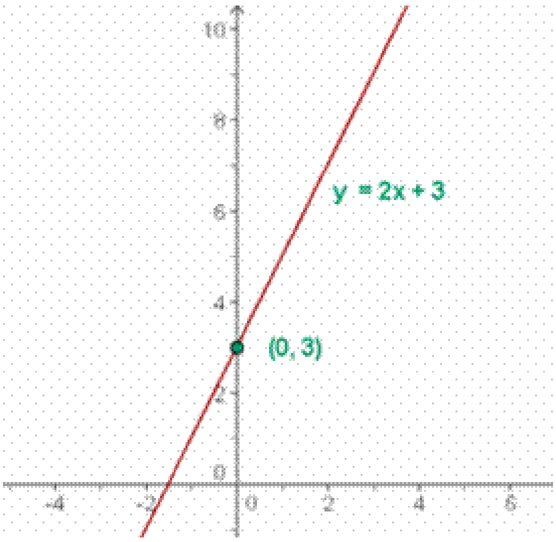
Función identidad f(x) = x. Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



3.1. Función lineal afín

La función afín es del tipo: y = mx + n, m es la pendiente. **Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.**





n es la ordenada en el origen y nos indica el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.

Para representar una función lineal afín, daremos unos valores a x y calcularemos los correspondientes valores de y, una vez que tengamos dichos valores los representaremos en los ejes de coordenadas y uniremos los puntos con una recta.

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE OY:
Se calculan haciendo en la expresión de la función x = 0, y calculando la y. Como máximo hay un punto de corte con el eje OY que será de la forma: P (0, y_0).

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE OX:
Se calculan haciendo en la expresión de la función y = 0, y calculando la x. Pueden existir cualquier número de ellos. Serán de la forma: Q (x_0, 0).

Ejemplo:

Calcula los puntos de corte de la función y = 6x – 3 con los ejes.

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE OY: Hacemos x = 0, luego

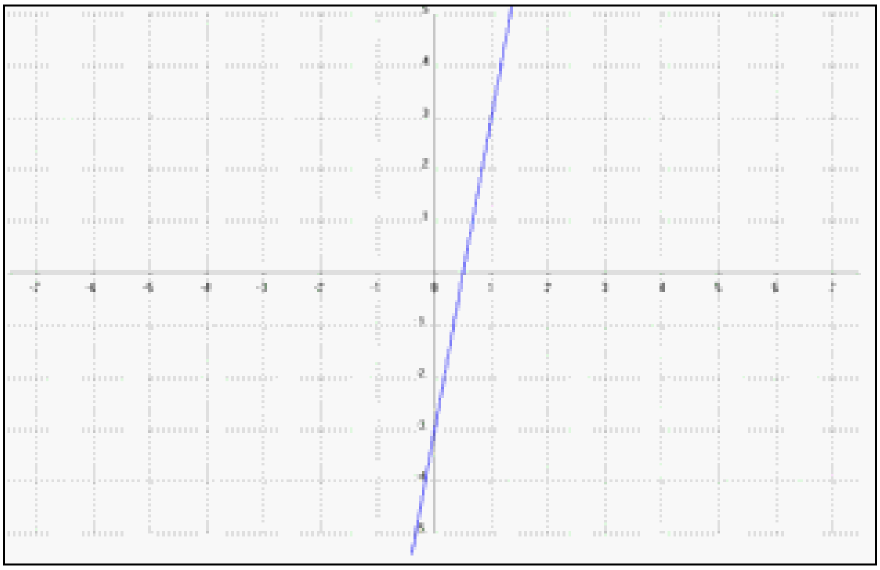
$$y = 6 \cdot 0 - 3 = 0 - 3 = -3.$$

El punto de corte con el eje OY es **P(0, -3)**

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE OX: Hacemos y = 0, luego
0 = 6x – 3; despejamos x: 6x = 3;

$$x = \frac{3}{6} \qquad x = \frac{1}{2}$$

El punto de corte con el eje OY es **Q($\frac{1}{2}$, 0)**.
Esto lo vemos en la gráfica de dicha función

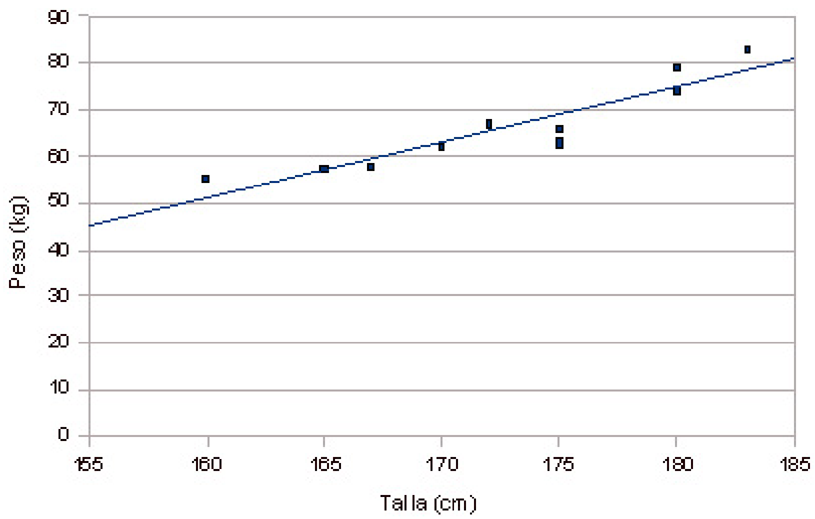


3.2. Aplicaciones.
Por último, podríamos añadir que la función lineal se usa frecuentemente como herramienta para predecir valores a partir de unos datos dados, utilizando, por ejemplo, la denominada recta de regresión lineal, como se muestra en el siguiente ejemplo que permite estimar el peso en función de la talla:

Datos:

Talla (cm)	Peso (Kg)
160	55
165	57
167	58
170	62
172	67
175	63
175	66
180	74
180	79
183	83

Gráfica de la recta que aproxima estos valores:



Si observamos la gráfica anterior, podríamos suponer por ejemplo que una persona de 185 cm pesaría algo más de 85 Kg.

De manera más precisa, si la expresión de la recta es: y = 1'0909x - 121'9, se pueden calcular valores para la variable y, conocidos los de x, así, el valor del peso que suponíamos aproximado para una talla de 185 cm sería:

Peso = 1'0909 · 185 - 121'9 = 79'9.

Las predicciones hechas con la recta de regresión no son exactas, pero se puede utilizar para realizar estimaciones.

3.3.- Actividades

1. Calcular el dominio de las funciones polinómicas:

$$\mathbf{f(x) = 2x5 – 6x3 + 8x2 – 5} \qquad \mathbf{f(x) = \frac{2x^2 - 3}{5}}$$

2. Calcular el dominio de las funciones racionales:

$$f(x)=\frac{2x^2-3}{x+2} \qquad f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2-1}$$

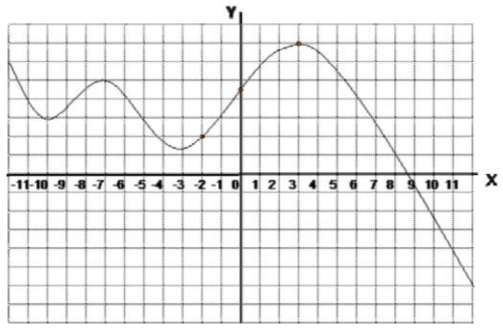
$$f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+1} \qquad f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+2x+1}$$

3. Calcular el dominio de las funciones radicales:

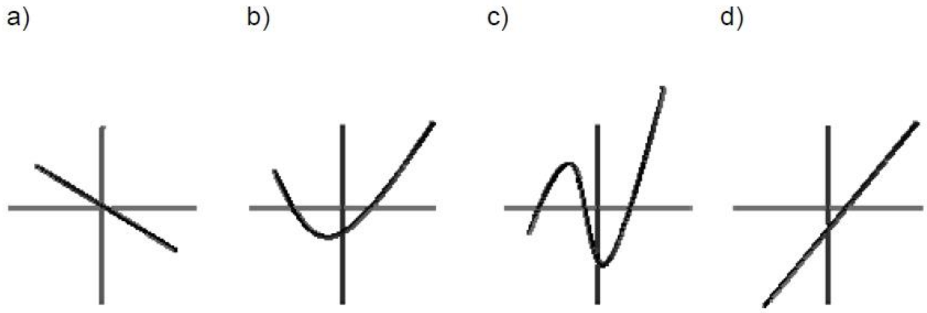
$$f(x)=\sqrt{x-2} \qquad f(x)=\sqrt{-x+2} \qquad f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$$

$$f(x)=\sqrt{-x^2+6x-8} \qquad f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$$

4. Observa la gráfica siguiente y determina:
a) Su valor en los puntos x = -2, x = 0 y x = 3.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) Los valores de x en los que se alcanzan puntos de máximo o de mínimo.



5. En las gráficas siguientes hay dos lineales y dos no lineales, indica cuál es de cada tipo:



6. Representa las siguientes funciones, sabiendo que:
a) Tiene pendiente −3 y ordenada en el origen −1.
b) Tiene por pendiente 4 y pasa por el punto (−3, −2).

7. Tres kilogramos de boquerones valen 18 €. Escribe y representa la función que define el coste de los boquerones en función de los kilogramos comprados.

8. En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2,5 cm. Establecer una función afín que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

9. Cuando se excava hacia el interior de la tierra, la temperatura aumenta con arreglo a la siguiente fórmula:

$$t = 15 + 0{,}01\ h$$

Donde t es la temperatura alcanzada en grados centígrados y h es la profundidad, en metros, desde la corteza terrestre. Calcular:
a) ¿Qué temperatura se alcanza a los 100 m de profundidad?
b) ¿Cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100ºC?

10. El nivel de contaminación de una ciudad a las 6 de la mañana es de 30 partes por millón y crece de forma lineal 25 partes por millón cada hora. Sea y la contaminación en el instante t después de las 6 de la mañana.
a) Hallar la ecuación que relaciona y con t.
b) Calcular el nivel de contaminación a las 4 de la tarde.

4. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

La importancia de la investigación científica queda plasmada en el ejemplo que se estudia en este tema, porque poco pudieron sospechar los antiguos griegos el uso que siglos después se da a la curva parabólica. Basta que, cada vez que mires la televisión, te acuerdes de un tipo de antena gracias al que la señal llega desde el emisor al receptor distribuidor: la antena parabólica. En este tema se estudiará la función cuadrática, a la que se asocia gráficamente la curva denominada parábola.

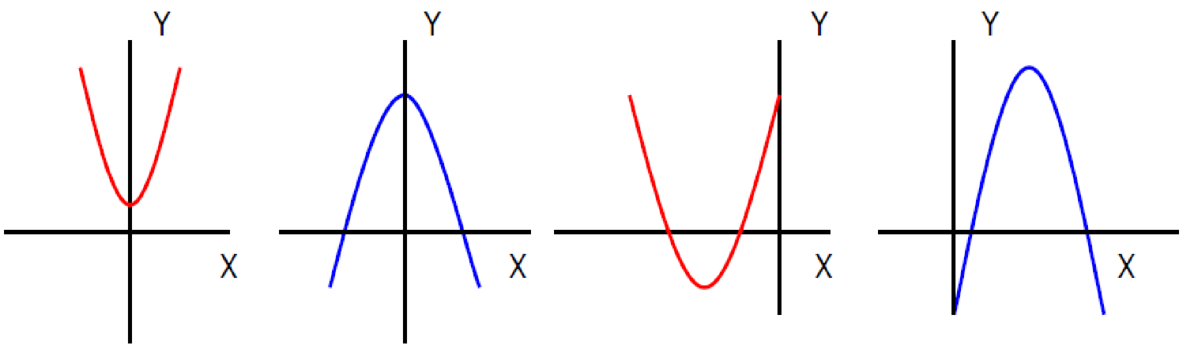
Las funciones cuadráticas se representan mediante parábolas: una curva que describe un balón cuando se lanza a canasta es una parábola; un chorro de agua describe una parábola. También existen funciones que se representan mediante parábolas: el espacio que recorre un coche desde que deseamos frenar hasta que realmente se para, en función de la velocidad que lleva; el área de un cuadrado en función de su lado...

4.1. Definición

Son funciones polinómicas de segundo grado, siendo su gráfica una parábola.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

4.2. Representación gráfica de la parábola

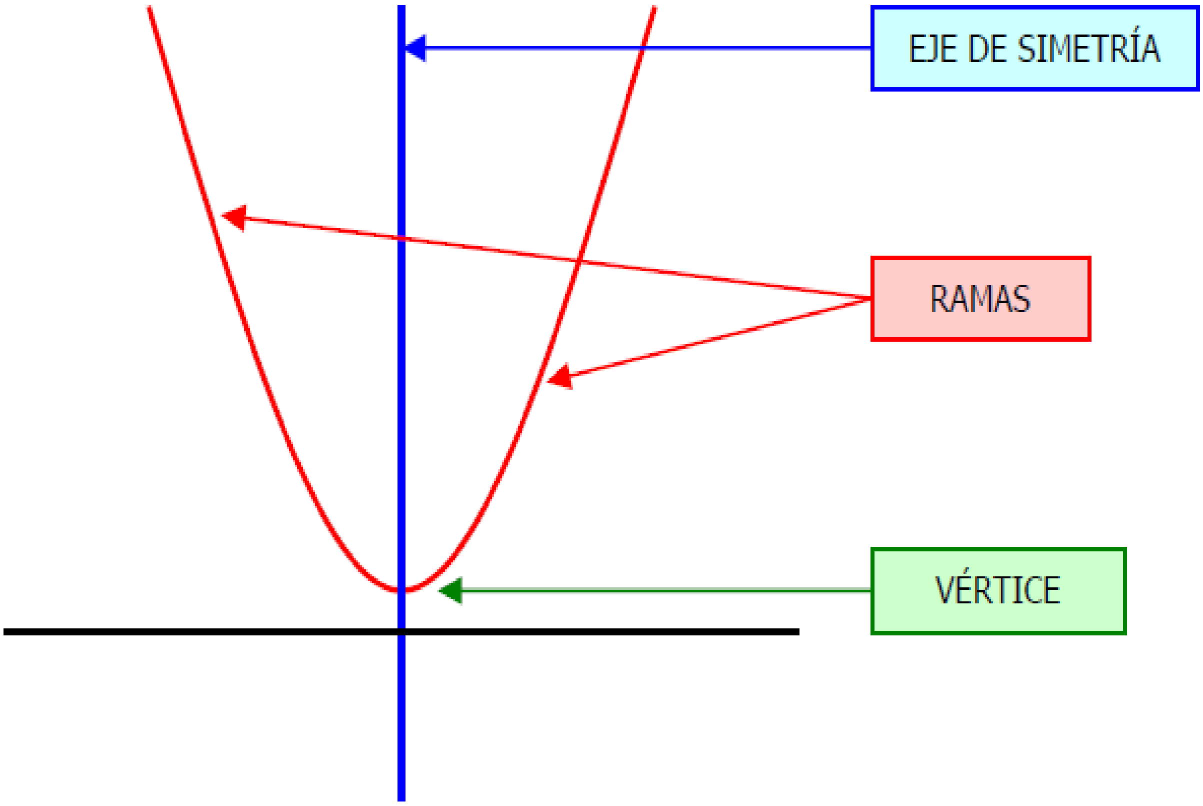


Los elementos de una parábola son:

EJE DE SIMETRÍA: Es una recta paralela al eje Y por la que se puede doblar la parábola de forma que las dos ramas de la parábola coincidan.

VÉRTICE: Es el punto donde la parábola presenta un máximo o un mínimo.

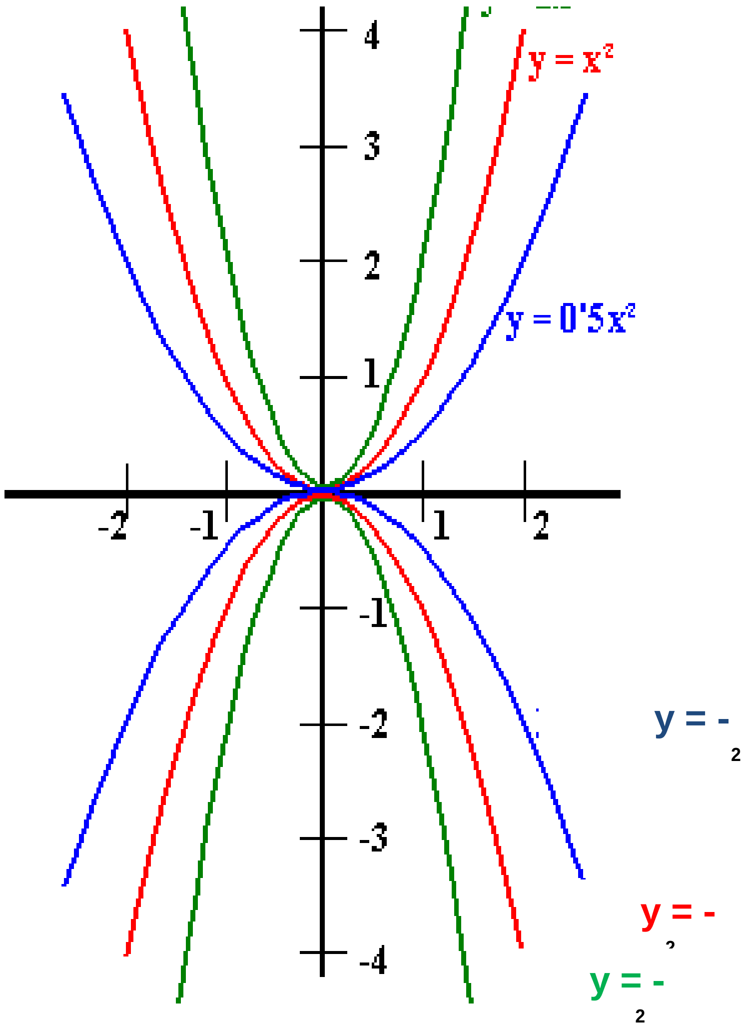
RAMAS: una decreciente y otra creciente, formando una curva simétrica respecto del eje de simetría.



4.3. Influencia de los parámetros en la gráfica de las funciones cuadráticas

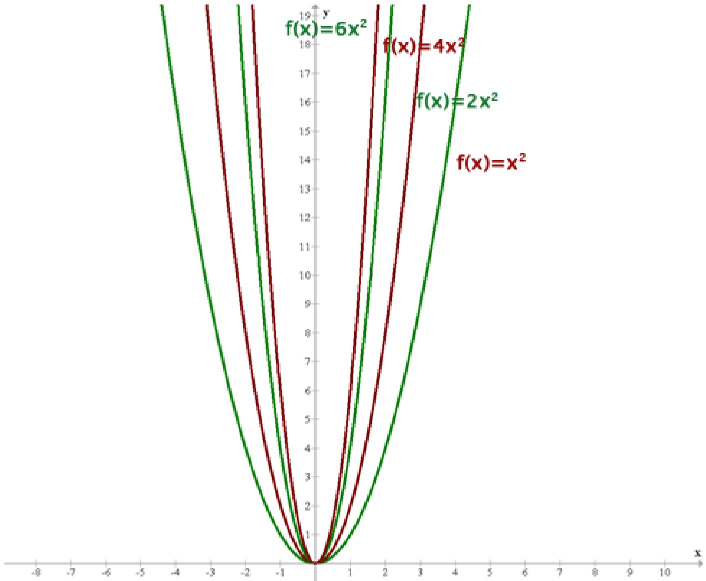
A) Parábolas del tipo $y = ax^2$ (b = 0, c = 0)

- Las parábolas de ecuación $\mathbf{y = ax^2}$ tienen por vértice el punto V(0,0).
- Cuanto mayor sea **a** (en valor absoluto), más cerrada será la parábola.
- Las ramas van hacia arriba si **a > 0** o hacia abajo si **a < 0**.
- Si **a > 0**, el vértice de la función será un **mínimo**.
- Si **a < 0**, el vértice de la función será un **máximo**.



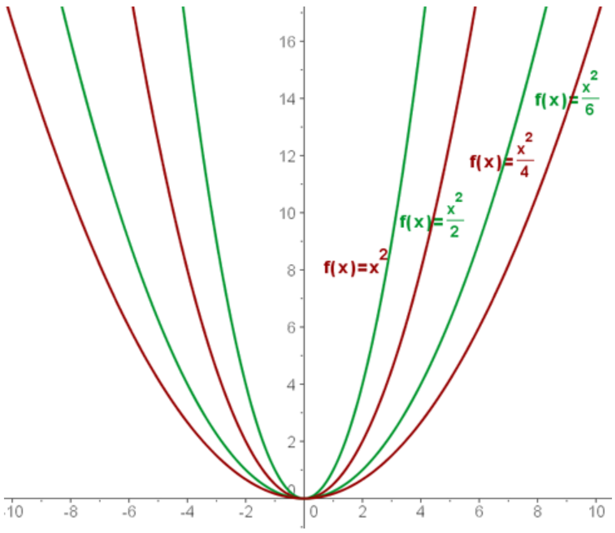
Contracción de una función

Una función f(k·x) se contrae si K > 1.

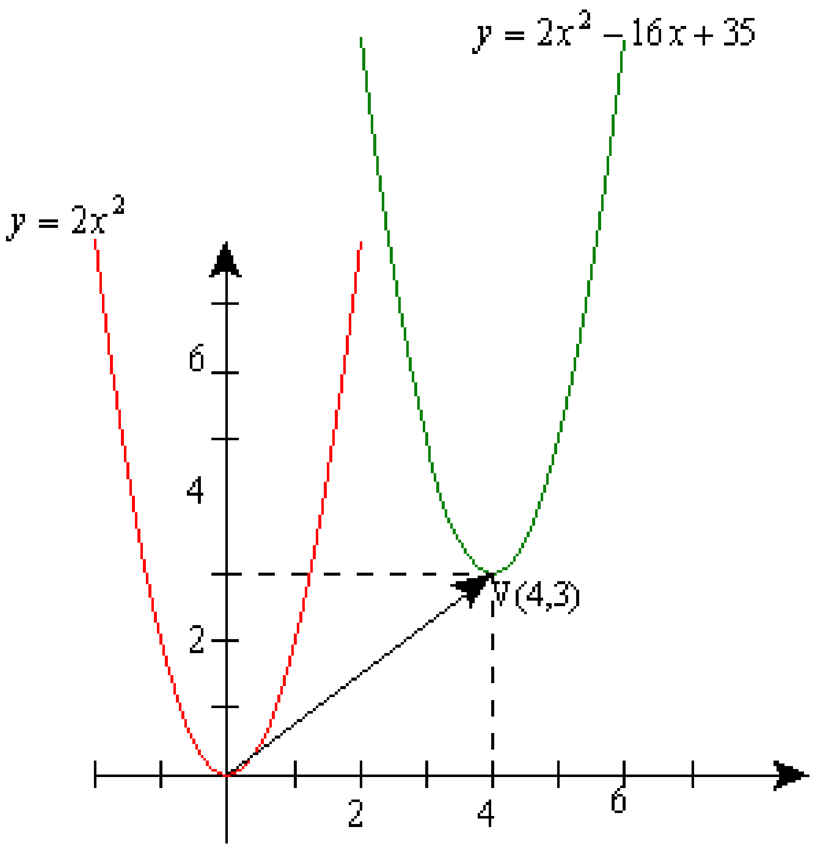


Dilatación de una función

Una función f(k·x) se dilata si 0 < K < 1.



La forma de una parábola depende única y exclusivamente del coeficiente a de x^2, es decir, cualquier parábola del tipo $y = ax^2 + bx + c$ tiene la misma forma que la parábola $y = ax^2$.



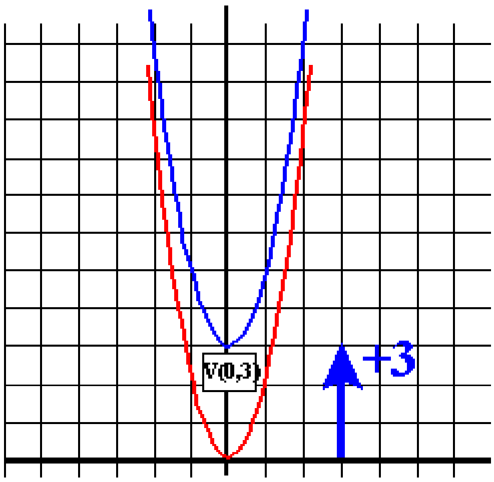
Por ejemplo:

La parábola **$y = 2x^2 - 16x + 35$** tiene la misma forma que **$y = 2x^2$**; encajan perfectamente una encima de la otra como puedes comprobar si dibujas las dos parábolas.

Al someter la parábola **$y = 2x^2 - 16x + 35$** a una traslación de vector (4,3), que son las coordenadas de su vértice, obtenemos la parábola **$y = 2x^2$**.

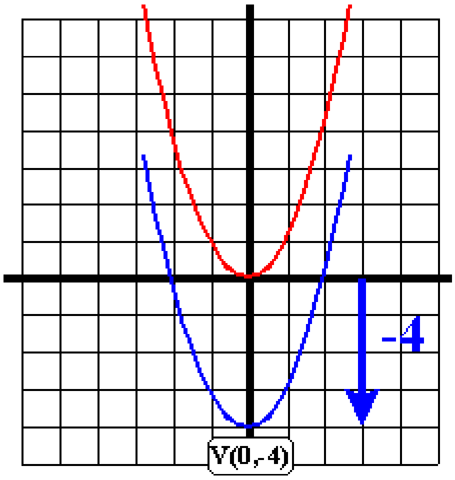
B) Parábolas del tipo $y = ax^2 + c$ ($b = 0$)

La gráfica de **$g(x) = 2x^2 + 3$**, se obtiene a partir de la gráfica de **$f(x) = 2x^2$**, desplazándola 3 unidades hacia arriba. El vértice se halla en V(0,3).



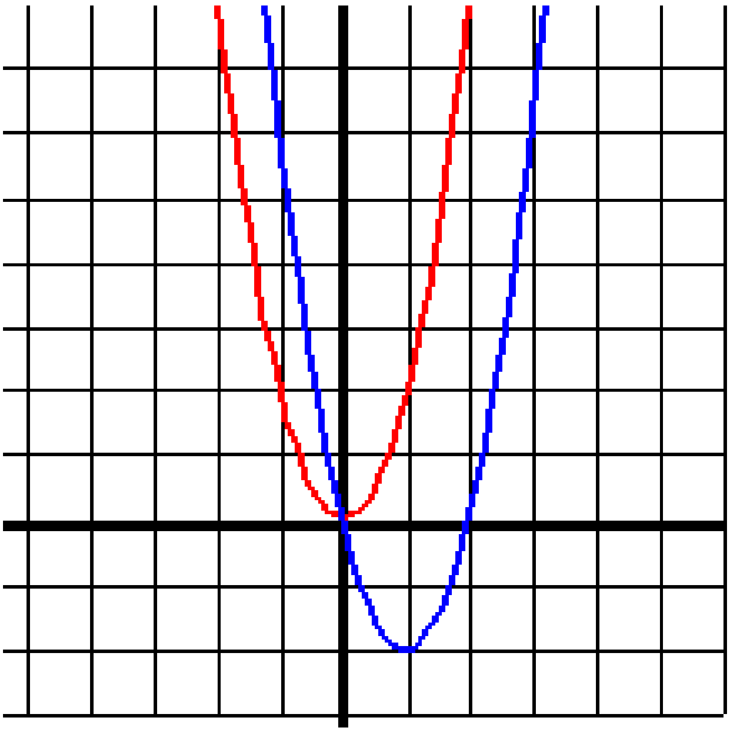
La gráfica de $h(x) = x^2 - 4$, se obtiene a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$, desplazándola 4 unidades hacia abajo.

El nuevo vértice es V(0,-4) .



Las parábolas del tipo $\mathbf{y = ax^2 + c}$, tienen exactamente la misma gráfica que $\mathbf{y = ax^2}$, **c** unidades hacia arriba o hacia abajo, según el signo de **c** y, por lo tanto, su vértice es el punto **V(0,c)**.

C) Parábolas del tipo $y = ax^2 + bx$ (c = 0)



La gráfica de la parábola $y = 2x^2 - 4x$ pasa por el punto (0,0). La 1ª coordenada del vértice es $\frac{-b}{2a} = 1$. Sustituyendo, obtenemos que la 2ª coordenada del vértice es -2. Luego el vértice es V(1,-2). Utilizando la simetría de la parábola podemos obtener el punto (2,0).

Si la parábola es del tipo $\mathbf{y = ax^2 + bx}$, entonces pasa por el origen de coordenadas y corta también al eje x en el punto **(- b, 0)**

4.4. Construcción de parábolas.

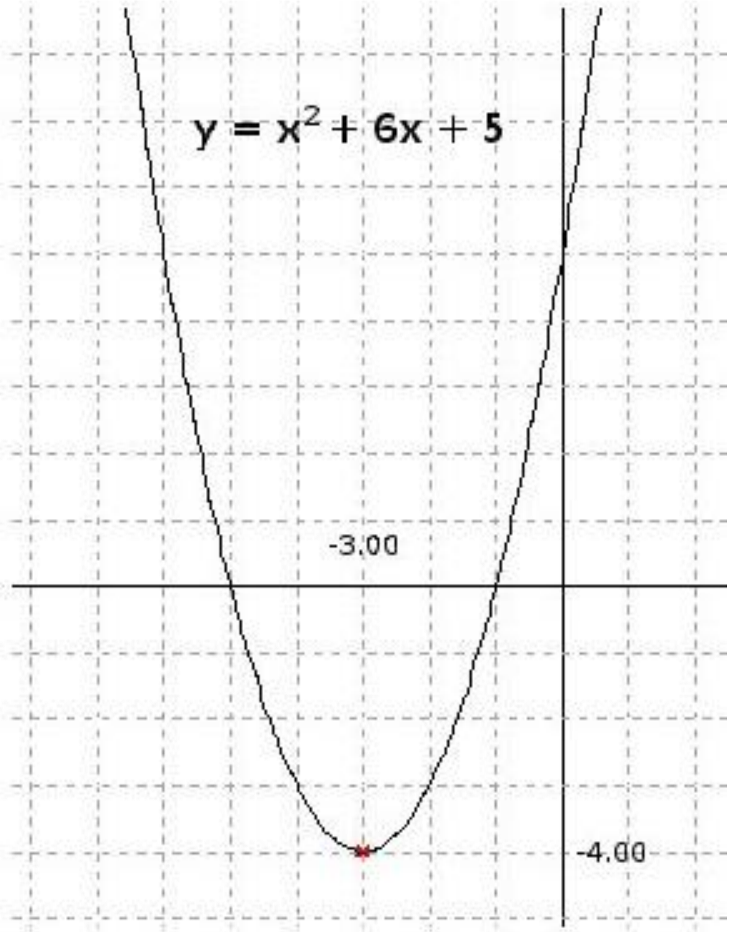
Podemos construir una parábola a partir de estos 4 puntos:

a) Vértice

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad y_0 = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \quad V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

En la imagen siguiente vemos la gráfica de la parábola $y = x^2 + 6x + 5$, cuyo vértice es:

$$X_0 = \frac{-6}{2.1} = -3 \text{ , } y_0 = f(-3) = (-3)^2 + 6.(-3) + 5 = -4$$



Por este punto pasa el eje de simetría de la parábola.
La ecuación del eje de simetría es:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

b) Puntos de corte con el eje OX.

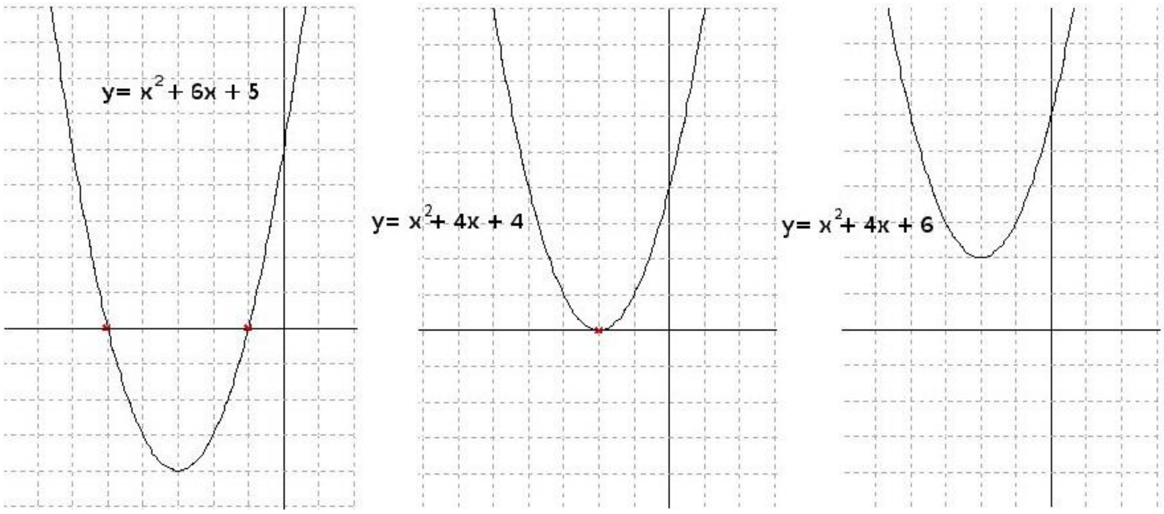
En el eje de abscisas la segunda coordenada es cero, por lo que tendremos:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

Resolviendo la ecuación podemos obtener:

- Dos puntos de corte: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ si $b^2 - 4ac > 0$
- Un punto de corte: $(x_1, 0)$ si $b^2 - 4ac = 0$
- Ningún punto de corte si $b^2 - 4ac < 0$

En la siguiente imagen vemos un ejemplo de cada una de estas tres situaciones.



Observa que:
• $6^2 - 4\cdot1\cdot5 = 36 - 20 = 16 > 0$
• $4^2 - 4\cdot1\cdot4 = 16 - 16 = 0$
• $4^2 - 4\cdot1\cdot6 = 16 - 24 = -8 < 0$

c) Punto de corte con el eje OY.
En el eje de ordenadas la primera coordenada es cero, por lo que tendremos:

$$\mathbf{f(0) = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = c \quad (0,c)}$$

Ejemplo
Representar la función **$f(x) = x^2 - 4x + 3$**
1. Vértice

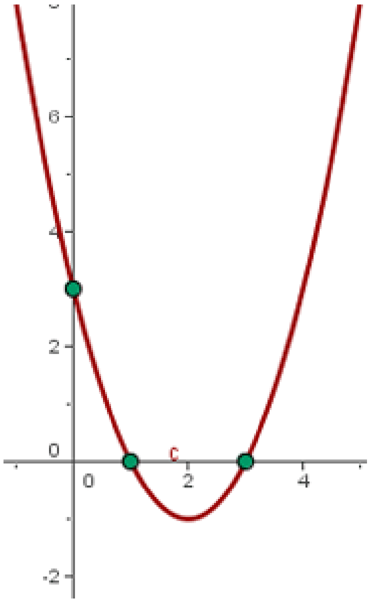
$$X_V = \frac{-(-4)}{2} = 2 \qquad Y_V = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1 \qquad \mathbf{V\ (2, -1)}$$

2. Puntos de corte con el eje OX. $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} \quad \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

(3, 0) (1, 0)

3. Punto de corte con el eje OY.
(0, 3)



4.5. Aplicaciones de la función cuadrática.

Podemos encontrar aplicaciones de las funciones cuadráticas en gran cantidad de teorías y estudios, por ejemplo:

• El tiro parabólico: es un ejemplo clásico de aplicación en la física, se trata de estudiar la trayectoria que sigue un objeto lanzado desde un punto situado a ras de tierra hasta que alcanza un objetivo, ubicado más o menos a la misma altitud. En condiciones ideales, de ausencia de rozamiento por el aire y otros factores perturbadores, el objeto describiría una parábola perfecta, cuya ecuación es**:**

$$s = v_0 . t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

donde **s** es el espacio recorrido, $\boldsymbol{v_0}$ la velocidad inicial, ***t*** el tiempo y ***g*** la aceleración de la gravedad.

• Se utilizan en la ingeniería civil, para la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres.

• El físico italiano Galileo (1564-1642) descubrió la ley que gobierna el movimiento de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra: *“La velocidad de caída de los cuerpos no depende de su masa y es directamente proporcional al tiempo”*. Así, si lanzamos un objeto con cierta inclinación hacia arriba la trayectoria seguida es una parábola. Esto es así porque el movimiento de dicho objeto puede descomponerse en dos: uno horizontal y otro vertical.

• Los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos, determinando en muchos casos que, una función cuadrática puede servir para estimar el peso que alcanzará un ejemplar de una determinada especie, según el porcentaje de un determinado alimento que se le administre.

• También podemos encontrar parábolas en ciertos fenómenos interesantes de reflexión: del sonido, de ondas electromagnéticas y de la luz, como caso particular de onda electromagnética. Gracias a los estudios acerca de las propiedades de esta curva, podemos construir antenas receptoras de las débiles señales de radio y televisión procedentes de los satélites de comunicación.

4.6. Actividades

11.-Indica, sin dibujarlas, en cuantos puntos cortan al eje de abscisas las siguientes parábolas:

1. $y = x^2 - 5x + 3$
2. $y = 2x^2 - 5x + 4$
3. $y = x^2 - 2x + 4$
4. $y = -x^2 - x + 3$

12.- El vértice de las siguientes funciones cuadráticas, ¿es un mínimo o un máximo? Represéntalas gráficamente:

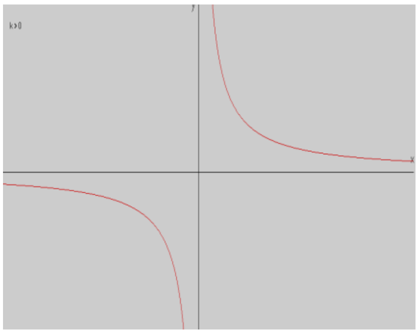
1. $y = -x^2 + 4x - 3$
2. $y = x^2 + 2x + 1$

5. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

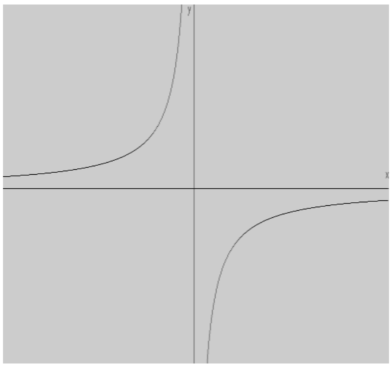
Se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** a las funciones de la forma: $\mathbf{y = \frac{k}{x}}$ con k distinto de cero

Las gráficas de estas funciones se llaman **hipérbolas.** Según sea el signo de k la gráfica de la función adopta la forma:

k > 0



k < 0



5.1. CARACTERÍSTICAS

- **Dominio:** Dom f = IR – {0} = (-∞,0) y (0, +∞)
- **Imagen:** Im f = IR – {0}
- **Crecimiento:** Son crecientes si k < 0 y son decrecientes si k > 0
- **Máximos y mínimos:** no tiene
- Su **gráfica** se aproxima a los ejes sin llegar a tocarlos. Se dice entonces, que los ejes de coordenadas son las **asíntotas** de dicha hipérbola
- **Continuidad:** son discontinuas en x = 0

EJEMPLO

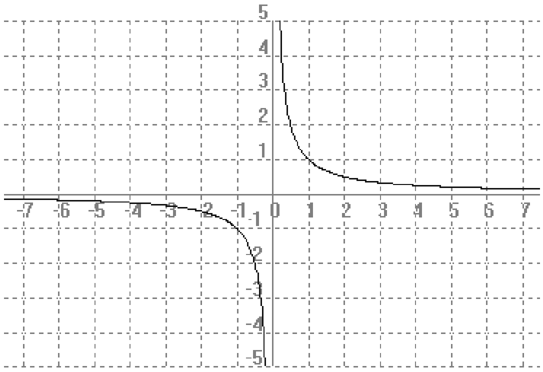
Vamos a dibujar la gráfica de la función y = $\frac{1}{x}$.

Para representarla construiremos una tabla de valores, teniendo en cuenta que la variable x no puede tomar el valor cero.

X	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	-2	$\frac{-1}{2}$	-3	$\frac{-1}{3}$
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	-1	$\frac{-1}{2}$	-2	$\frac{-1}{3}$	-3

Esta es la gráfica de la función

y = $\frac{1}{x}$:



6. FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial es muy importante en matemáticas. Es la función con más presencia en los fenómenos observables. Así presentan comportamiento exponencial: la reproducción de una colonia de bacterias; la desintegración de una sustancia radiactiva; algunos crecimientos demográficos; la inflación; la capitalización de un dinero colocado a interés compuesto, etc

Se llaman **funciones exponenciales** a las funciones de la forma

f(x) = a^x o **y = a^x**,

donde la base de la potencia **"a"** es nº positivo $\neq 1$ y el exponente la variable **x**.

UN EJEMPLO REAL

Algunos tipos de **bacterias** se reproducen por **"mitosis"**, dividiéndose la célula en dos cada espacio de tiempo muy pequeño, en algunos casos cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias se producen en estos casos, a partir de una, en un día?

Periodo de 15 minutos	1	2	3	4	....
Nº Bacterias	2	4	8	16	2^x

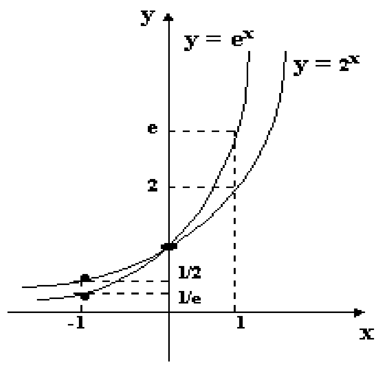
siendo **x** los intervalos de 15 minutos:..$2^4 = 16$ en una hora, $2^8 = 256$ en dos horas,... $2^{24 \cdot 4} = 2^{96} = 7{,}9 \cdot 10^{28}$. ¡en un día!. Esto nos da idea del llamado **¡crecimiento exponencial!**, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa.

6.1. CARACTERÍSTICAS

- Todas ellas son continuas, y definidas en toda la recta real (R).
- Pasan por los puntos (0, 1) y (1, a).
- Si a es un número que está entre 0 y 1 **(0<a <1)**, la función será decreciente.
- Si a es mayor que 1 **(a>1)**, la función será creciente.
- También son exponenciales las funciones de la forma **$y = a^{kx}$**
- Para representar las funciones exponenciales, elaboraremos una tabla de valores

EJEMPLOS

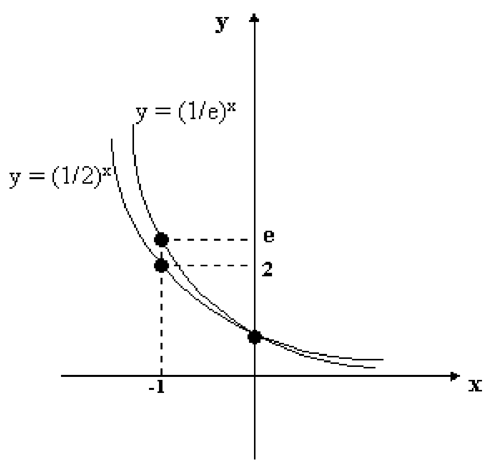
En la siguiente gráfica se muestra la representación de las funciones $y = e^x$, e $y = 2^x$.



Para representar cada una de ellas, nos hemos ayudado de una tabla de valores. Por ejemplo, para la función exponencial $y= 2^x$:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

Otros ejemplos: $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



6.2. APLICACIONES

El **interés compuesto** es una ley de capitalización de manera que los intereses obtenidos al final de cada período se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el período siguiente. Un capital de **C** euros al **i %** al cabo de t años se convierte en:

$$\mathbf{C(t) = C(1+r)^t \quad \text{siendo} \quad r = \frac{i}{100}}$$

EJEMPLO

En el pueblo de Adela están buscando voluntarios para colaborar económicamente en la construcción de una Biblioteca Juvenil. Adela quiere participar con los ahorros que tiene en una cuenta en la que depositó 1 000 euros hace 5 años a un interés del 6 %. ¿Con cuánto dinero participará Adela?

Año 0 tiene 1000 €; el primer año tendrá 1000+1000 · 6/100 = 1000 · (1 + 0,06) = 1060 €;

El 2º año 1060 · (1 + 0,06) = 1000 · (1 + 0,06) · (1 + 0,06) = 1000 · $(1 + 0,06)^2$ = 1123,6 €;

El 3º año 1123,6 · (1 + 0,06) = 1000 · $(1 + 0,06)^2$· (1 + 0,06) =1000 · $(1 + 0,06)^3$ = 1191.02 €

Por tanto al cabo de 5 años tendrá C(5) = 1000 · $(1 + 0,06)^5$ = 1338,22 €

EJERCICIOS

13. Un coche de gasolina, de marca A, cuesta 12000 € y consume 7l cada 100 km. El precio de la gasolina es 1,12 €/l. Calcula el gasto, G, en función del número x, de kilómetros recorridos.

14. Un coche de gasóleo, de marca B, cuesta 15120 € y consume 5l cada 100 km. El precio del gasóleo es 1,02 €/l. Calcula el gasto, G, en función del número x, de kilómetros recorridos.

15. Teniendo en cuenta los ejercicios 13 y 14. ¿A partir de cuántos km recorridos empieza a resultar más barato el coche B que el A?

16. El servidor de Internet GUAYANDÚ tiene la tarifa GUAY, que consiste en una cuota fija mensual de 20 € y 0,01 € cada minuto. El servidor JOMEIL tiene la tarifa CHUPY sin cuota fija. Solo hay que pagar 0,02 € por minuto. ¿A partir de cuántos minutos mensuales es más rentable GUAY que CHUPY?

17. Dados los puntos A(2, -3) y B(-1, -4). Calcular:

   a) La ecuación de la recta r que pasa por los dos puntos.
   b) La pendiente y los puntos de corte con los ejes de dicha recta.
   c) La ecuación de la recta paralela a r que pase por C(-1, -2).
   d) La ecuación de la recta perpendicular a r que pase por C(-1, -2).

18. El Departamento de Actividades Extraescolares quiere organizar un viaje para los alumnos de un Instituto y, para ello, necesita un autobús. Ha pedido presupuesto a dos empresas:

- *“Viajes Zamorano”* propone una oferta de 300€ por el autobús más 5€ por cada pasajero.
- *“Viajes Moreno”* se compromete a cobrar 275€ por el autobús y 6€ por cada pasajero.

a) Escribe la expresión matemática que permite calcular el importe total del autobús en función del número de viajeros para cada una de las empresas.

b) ¿Para qué número de pasajeros resulta más rentable cada una de las empresas?

19. El arco de un pórtico que tiene forma parabólica cuyo trazado lo da la función $f_{(x)}$ y el eje *OX*

$$f_{(x)} = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

a) Representarlo gráficamente.
b) Determinar su anchura y su máxima altura.

20. El consumo de un vehículo en función de la velocidad en km/h, viene dado por la expresión $C(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}12x + 10$. Representa gráficamente la función y contesta:

a) ¿A qué velocidad el consumo es menor?
b) ¿Entre que velocidades el consumo no supera los 8 litros

21. Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función:

$$F(x)=28x^2 + 36000x$$

mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función:

$$G(x)= 44x^2 + 12000x + 700000$$

donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

a) La función que define el beneficio en euros.

b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.

c) El beneficio máximo.

22.Una compañía de autobuses observa que sus ingresos dependen del precio p a que cobren el billete, en euros, según la función: $I(p) = 18p – 3p^2$. ¿para qué valor de p los ingresos alcanzan el mayor valor posible?¿Cuál es ese valor máximo?

23. Un restaurante abre sus puertas a las 12 h y las cierra a las 17 h. La siguiente expresión algebraica muestra el nº de clientes C en función de la hora en que está abierto el restaurante: $C(h) = -10h^2 + 40h + 50$

a) Representa esta función.

b) ¿Qué parte de la gráfica tiene sentido real? Indica el significado de los puntos de corte con los ejes.

c) ¿Durante qué horas aumenta el nº de clientes.

d) ¿Entre qué horas hay más de 80 comensales?

24. Tras la aparición de cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $P_{(t)} = -2t^2 + 48t$, siendo t el número de días desde que se detectó el primer caso.

a) ¿Durante cuántos días el número de casos aumenta? ¿Cuándo disminuye?

b) ¿Cuándo es máximo el número de afectados? ¿Cuántos afectados son?

c) ¿Cuántos afectados había el tercer día?

25. La siguiente tabla muestra el tiempo de llenado de una piscina en función del número de grifos que se abren:

Nº de grifos (x)	2	3	4	5	6
Tiempo en horas (y)	12	8	6	$\frac{24}{5}$	4

¿Cuál es la expresión matemática de la función que se ajusta a la tabla?

26. Un cine-club piensa proyectar una gran película la próxima semana. El alquiler de la misma cuesta 300 € que deben pagar entre todos los asistentes a la proyección. Encuentre la función.

27. Un generador de sonidos emite éstos con distintas longitudes de onda y distintas frecuencias, según muestra la tabla:

Frecuencia(ciclos7segundo)	6	60	75	150	500	800	1200
Longitud de onda(metros)	50	5	4	2			

a) Completa esta tabla.

b) Encuentra la fórmula matemática asociada a esta función.

28. La fórmula que da la cantidad en gramos, de una determinada sustancia radioactiva en función del tiempo en años es:

$$N_{(t)} = 100 \cdot 2^{-05,t}$$

a) Calcular la cantidad inicial.
b) Calcular la cantidad al cabo de 10 años.
c) Calcular los años que tienen que transcurrir para que la cantidad que quede sea de un gramo.

29. La producción en kilogramos de calabacín en un invernadero depende de la temperatura t, en grados centígrados de éste, y viene dada por la expresión:

$P_{(t)} = -t^2 + 40t$ (suponer t>0)

a) ¿Qué producción se obtiene si la temperatura es de 18º?
b) ¿A qué temperatura se produce la máxima producción?
c) Determinar la producción máxima.

30. Joaquín pone en una cuenta de ahorros 2 500 euros a un interés del 4 % en el año 2006. ¿Cuánto dinero tendrá el año 2010? ¿Y el 2015?

31. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente, uno de sus productos vale 18 €. Encuentra la función que dé el precio del producto en función de los años transcurridos y contesta:

a) ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?
b) ¿Cuánto costaba hace 4 años?

32. Los controles de calidad de una cadena de montaje de ordenadores han obtenido que el porcentaje de ordenadores que siguen funcionando al cabo de t años viene dado por: $\mathbf{p(t) = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t}$

a) ¿Qué porcentaje de ordenadores sigue funcionando al cabo de 2 años?
b) ¿Y al cabo de 5?
c) ¿Cuántos años habrán pasado si el porcentaje de ordenadores que siguen funcionando es del 10%?

33. A nivel del mar el agua hierve a 100 º C. A esta temperatura se le llama *punto de ebullición*. Cuando se asciende a una montaña el punto de ebullición cambia, en función de la altura, con arreglo a la siguiente fórmula:

$f_{(x)} = -0.001x + 100$, donde $f_{(x)}$ es la temperatura del punto de ebullición en grados centígrados y x es la altura alcanzada.

a) ¿Cuál es la variable independiente y la dependiente?
b) ¿Cuál es el punto de ebullición a 1500 metros de altitud?
c) ¿Cuál es el punto de ebullición en la cima del Everest? (X = 8848 metros)
d) Si la temperatura del punto de ebullición es 96.5º C, ¿cuál es la altura alcanzada?

34. Dada la función cuadrática $f_{(x)} = x^2 - 6x + 8$. Calcula:

a) Vértice de la parábola.
b) Puntos de corte con el eje X, es decir la antiimagen del 0.
c) Punto de corte con el eje Y, es decir la imagen del 0
d) f(1), f(5) y f(6).
e) Representa dicha función.

35. Un recibo de luz refleja los siguientes conceptos: una cantidad fija por potencia contratada y una cantidad variable por consumo. La cuota fija es de 10€ y 0,082 por Kw-hora.

a. ¿Cómo expresarías el coste del recibo de la luz en función del número de kw-hora consumidos?
b. ¿Cuál es el recibo para un consumo de 100 K-hora?
c. Si la factura de la luz es de 40€ ¿cuántos Kw-hora se han consumido?

36. Se sabe que cuando comienza el invierno el nº de moscas decrece y en un determinado campo de cultivo dicho nº viene dado por $P(x) = 500000 \cdot e^{-0,06498x}$, siendo x el tiempo medido en días.

a) Determina el nº inicial de moscas.
b) Encuentra el nº de moscas supervivientes después de 16 días.
c) Al cabo de cuántos días habrá 62.500 moscas.

37. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R(x) en miles de euros viene dada por:

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,5x + 2,5$$

siendo x la cantidad invertida en miles de euros.

a) Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.
b) ¿Qué rentabilidad obtendrá?

38. La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 ºC, y en la Fahrenheit es de 32 ºF. La ebullición del agua es 100 ºC, que equivale a 212 ºF

a) Encuentra la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas
b) Expresa en grados Fahrenheit 25 ºC y 10 ºC
c) Pasa a grados centígrados 86 ºF y 63,5 ºF

TEMA 7: ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

1. LA ESTADÍSTICA

La **estadística** es la ciencia que se ocupa del recuento, ordenación y clasificación de los datos obtenidos por las observaciones, para poder hacer comparaciones y sacar conclusiones.

Un **estudio estadístico** consta de las siguientes fases:

- Recogida de datos.
- Organización y representación de datos.
- Análisis de datos.
- Obtención de conclusiones.

2. CONCEPTOS DE ESTADÍSTICA

- **Población**

  Una **población** es el conjunto de todos los elementos a los que se somete a un estudio estadístico.
- **Individuo**

  Un **individuo** o **unidad estadística** es cada uno de los elementos que componen la población.
- **Muestra**

  Una **muestra** es un conjunto representativo de la población de referencia, el número de individuos de una muestra es menor que el de la población.
- **Muestreo**

  El **muestreo** es la reunión de datos que se desea estudiar, obtenidos de una proporción reducida y representativa de la población.
- **Valor**

  Un **valor** es cada uno de los distintos resultados que se pueden obtener en un estudio estadístico. Si lanzamos una moneda al aire 5 veces obtenemos dos valores: cara y cruz.
- **Dato**

  Un **dato** es cada uno de los valores que se ha obtenido al realizar un estudio estadístico. Si lanzamos una moneda al aire 5 veces obtenemos 5 datos: cara, cara, cruz, cara, cruz.

3. VARIABLES ESTADÍSTICAS

3.1. CARACTERES Y VARIABLES

Carácter o variable: es cada una de las **características o cualidades** que poseen los i**ndividuos de una población**.

3.2. CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES ESTADÍSTICAS

1. **Variable cualitativa**

   Las **variables cualitativas** se refieren a **características o cualidades** que **no** pueden ser medidas con **números**. Podemos distinguir dos tipos:

- **Variable cualitativa nominal**

Una **variable cualitativa nominal** presenta **modalidades no numéricas** que **no** admiten un **criterio de orden**. Por ejemplo:

El estado civil, con las siguientes modalidades: soltero, casado, separado, divorciado y viudo.

- **Variable cualitativa ordinal o variable cuasicuantitativa**

Una **variable cualitativa ordinal** presenta **modalidades no númericas**, en las que existe un **orden**. Por ejemplo:

La nota en un examen: suspenso, aprobado, notable, sobresaliente.

Puesto conseguido en una prueba deportiva: 1º, 2º, 3º,...

Medallas de una prueba deportiva: oro, plata, bronce.

2. Variable cuantitativa

Una **variable cuantitativa** es la que se expresa mediante un **número**, por tanto se pueden realizar o**peraciones aritméticas** con ella. Podemos distinguir dos tipos:

- **Variable discreta**

Una **variable discreta** es aquella que toma **valores aislados**, es decir **no** admite **valores intermedios** entre dos valores específicos. Por ejemplo:

El número de hermanos de 5 amigos: 2, 1, 0, 1, 3.

- **Variable continua**

Una **variable continua** es aquella que puede tomar **valores comprendidos entre dos números**. Por ejemplo:

La altura de los 5 amigos: 1.73, 1.82, 1.77, 1.69, 1.75.

En la práctica medimos la altura con dos decimales, pero también se podría dar con tres decimales.

4. ORGANIZACIÓN DE DATOS: TABLAS Y FRECUENCIAS

Con el fin de poder trabajar con los datos recogidos, éstos se suelen distribuir en las llamadas **tablas** estadísticas.
Así, si consideramos que una población de N individuos se va a estudiar un carácter con $x_1, x_2, ..., x_k$ datos, entonces:
Se llama **frecuencia absoluta** de un valor de la variable x_i, al número de veces que se repite dicho valor. Se va a denotar por f_i.

OBSERVACIÓN: La suma de todas las frecuencias absolutas es el número total de datos N, es decir: $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k = N$.
Se llama **frecuencia relativa** al resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de datos. Se va a denotar por $h_i = \frac{f_i}{N}$. Su suma siempre vale 1.

También se definen la **frecuencia absoluta acumulada** F_i de un valor de la variable x_i como la suma de la frecuencia de ese valor con todas las anteriores:

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_i$$

Asimismo se define la **frecuencia relativa acumulada** H_i al resultado de dividir la frecuencia absoluta acumulada entre el número total de datos.

EJEMPLO

Queremos estudiar los años de nacimiento de los 30 niños de una guardería. Preguntando a sus madres obtenemos los siguientes datos:

2001, 2002, 2003, 2004, 2003, 2002,
2002, 2004, 2003, 2001, 2001, 2003,
2001, 2002, 2002, 2004, 2001, 2003,
2002, 2002, 2004, 2003, 2002, 2003,
2004, 2003, 2004 ,2002 ,2002, 2004.

Para ordenar los datos construimos la siguiente tabla de frecuencias:

Año de nacimiento	f_i	h_i	F_i	H_i
2001	5	5/30 = 0,17	5	5/30 = 0,17
2002	10	10/30 = 0,33	15	15/30 = 0,50
2003	8	8/30 = 0,27	23	23/30 = 0,77
2004	7	7/30 = 0,23	30	1
	N = 30	$\Sigma h_i = 1$		

A partir de la tabla podemos decir, por ejemplo:

- Hay 10 alumnos que han nacido en el año 2002
- El porcentaje de alumnos nacidos en 2004 es del 23%
- El número de alumnos nacidos antes de 2004 es 23
- El 50 % de los alumnos han nacido en 2001 y 2002.

Cuando en una distribución estadística, el número de valores distintos que toma la variable es muy grande o la variable es **cuantitativa continua**, el procedimiento seguido en las tablas de los apartados anteriores no resulta eficaz.

Este problema se resuelve agrupando los datos en intervalos. Estos son los denominados **intervalos de clase.** Para ello:

- Se localizan los valores extremos, es decir, el menor y el mayor de entre todos los valores que tenemos. Los llamamos “m” y “M”, respectivamente.
- Se halla su diferencia: Re = M – m, a la que llamamos recorrido.
- Se decide el número de intervalos que se quiere formar, teniendo en cuenta la cantidad de datos que se poseen, que llamaremos N. El número de intervalos será aproximadamente k = $\sqrt{\mathbf{N}}$.
- Se forman los intervalos de modo que el extremo inferior del primero sea algo menor o igual que **m** y de amplitud $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{Re}}{\mathbf{k}}$ (o una aproximación entera).

El punto medio de cada intervalo se llama **marca de clase**, y se representa por x_i. Es el valor que representa a todo el intervalo para el cálculo de algunos parámetros que veremos después.

EJEMPLO

Elaborar una tabla de frecuencias con las estaturas de 40 adolescentes que aparecen al margen:

168, 160, 167, 175, 175, 167, 168, 158, 149, 160,
178, 166, 158, 163, 171, 162, 165, 163, 156, 174,
160, 165, 154, 163, 165, 161, 162, 166, 163, 159,
170, 165, 150, 167, 164, 165, 173, 164, 169, 170.

El número de valores distintos que hay es grande (mayor que 20). Por eso, lo adecuado es clasificarlos en intervalos. Para ello, procedemos así:

- Localizamos los valores extremos: m = 149 y M = 178.
- Hallamos su diferencia: 178 – 149 = 29 (este valor es el recorrido).
- Como $\sqrt{40} = 6{,}32$, decidimos que el número de intervalos sea 6.
- Como $\frac{29}{6} = 4{,}8$, la amplitud será 5.
- Por último, repartimos los 40 datos en los seis intervalos.

Intervalos	Marcas de clase	f_i
[149-154)	151,5	2
[154-159)	156,5	4
[159-164)	161,5	11
[164-169)	166,5	14
[169-174)	171,5	5
[174-179)	176,5	4

Observa que cada uno de los intervalos es cerrado por la izquierda y abierto por la derecha. Esto significa que, por ejemplo, el dato 154 corresponde al segundo intervalo y no al primero.

5. GRÁFICAS ESTADÍSTICAS

Las gráficas nos permiten apreciar de forma visual y directa la información recopilada en las tablas. Dependiendo del tipo de variable que se nos presente utilizaremos una u otra forma de representación gráfica. Las más importantes son las siguientes: Diagrama de barras, histograma, diagrama de sectores, y polígonos de frecuencias.

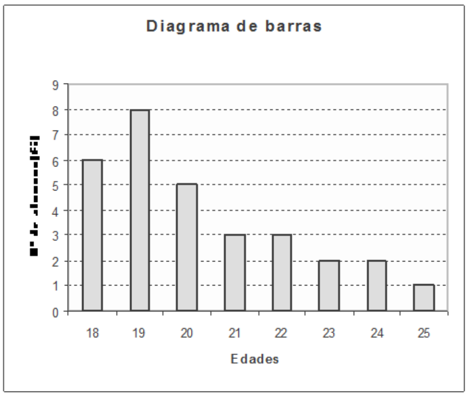
5.1 DIAGRAMA DE BARRAS Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS

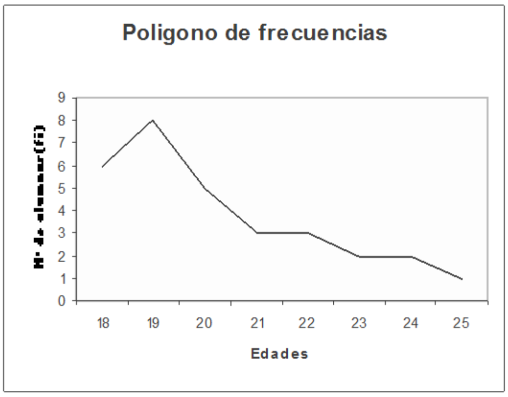
El **diagrama de barras** se utiliza para representar variables cualitativas o cuantitativas discretas. Sobre el eje horizontal se indican los valores de la variable y, en esos puntos, se levantan barras verticales de altura igual a las frecuencias que queramos representar.

Si se unen los puntos (x_i, f_i) mediante segmentos rectilíneos se obtiene el **polígono de frecuencias**.

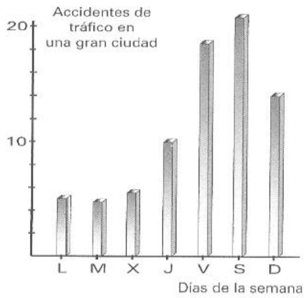
EJEMPLO

Con los datos del ejercicio 4, hemos realizado su diagrama de barras y su polígono de frecuencias





También se pueden utilizar con variables cualitativas, como se puede ver en siguiente ejemplo:



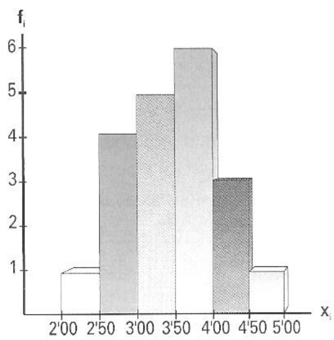
5.2. HISTOGRAMA. POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Histograma es el tipo de gráfica utilizado cuando la variable es cuantitativa continua (datos agrupados en intervalos). Sobre el eje horizontal se indican los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de base la amplitud del intervalo y altura la frecuencia. La línea poligonal que une los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo es el **polígono de frecuencias**.

EJEMPLO

Vamos a representar en un histograma la distribución de datos que aparece en el ejercicio 5. Al agrupar los datos en 6 intervalos, hemos obtenido la siguiente tabla:

Intervalos de clase	Marcas de clase X_i	Frecuencia absoluta f_i
[2’00-2’50)	2’25	1
[2’50-3’00)	2’75	4
[3’00-3’50)	3’25	5
[3’50-4’00)	3’75	6
[4’00-4’50)	4’25	3
[4’50-5’00)	4’75	1



5.3. DIAGRAMA DE SECTORES

El **diagrama de sectores** se usa para cualquier tipo de variable. Consiste en tomar un círculo y dividir su superficie en sectores (trozos) que sean proporcionales a los valores de las frecuencias.

EJEMPLO

En un grupo de 42 personas preguntamos qué tipo de espectáculos les gusta más: deportivos, teatrales, musicales o cinematográficos.

Tenemos las siguientes respuestas:

Deportivos: 12; **Teatrales**: 10; **Musicales**: 8; **Cinematográficos**: 12.

Construimos la tabla con las frecuencias absolutas y relativas:

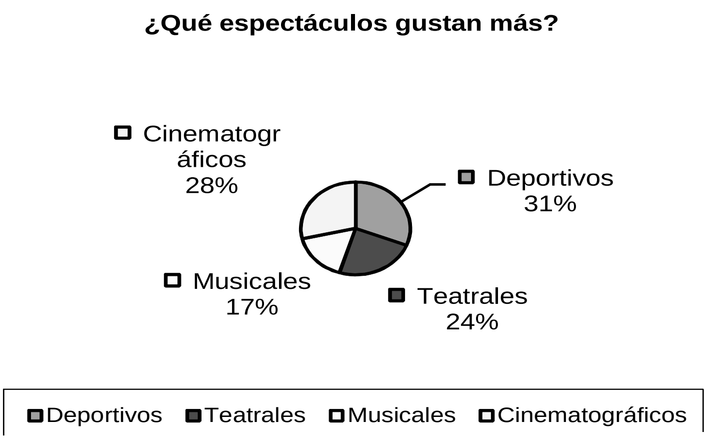
x_i	f_i	h_i
DEPORTIVOS	12	12/42= 0’30
TEATRALES	10	10/42= 0’24
MUSICALES	8	8/42= 0’17
CINEMATOGRÁFICOS	12	12/42=0’29

Ahora para hacer el diagrama de sectores vamos multiplicando cada frecuencia relativa por 360º, que son los grados completos que hay en el círculo completo.

Deportivos: 0’30 · 360º = 108º. Teatrales: 0’24 · 360º = 86’4º.

Musicales: 0’17 · 360º = 61’2º. Cinematográficos: 0’29 · 360º = 104’4º.

El diagrama tendrá la siguiente forma:



6. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Llamamos medidas de centralización a aquellos valores que calculamos a partir de los datos y resumen la información de éstos. Se sitúan en el centro de la distribución una vez ordenados los datos.

Las tres más importantes son: la media aritmética, la moda y la mediana.

6.1. MEDIA ARITMÉTICA

Se llama **media aritmética** de una variable estadística, y se simboliza por $\bar{x}$, a la suma de todos los datos divididos entre el número total de datos.

- CUANDO EL NÚMERO DE DATOS NO ES ELEVADO, la media se calcula de la siguiente forma:Si llamamos x_1, x_2, x_3, ... x_n a los datos de la distribución, la media, $\bar{x}$, es: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ =

EJEMPLO

Calculemos el peso medio de un grupo de personas cuyos pesos individuales son: 51, 57, 52, 53, 55, 54, 60, 63, 49, 50.

$$\bar{x} = \frac{51+57+52+53+55+54+60+63+49+50}{10} = \frac{544}{10} = 54{,}4\ kg$$

- CUANDO LA VARIABLE ES DISCRETA Y LOS DATOS APARECEN AGRUPADOS: En este caso, hacemos uso de la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{N}$$

donde k es el número de valores distintos que toma la variable, y N es el número total de datos (Recuerda que N = $\sum$ $\mathbf{f_i}$).

EJEMPLO

En la siguiente distribución:

x_i	f_i	$f_i x_i$
1	15	15
3	23	69
5	45	225
7	36	252
9	19	171
	138	732

N = $\sum f_i$ = 138 y $\sum f_i x_i$ = 732.

Por tanto, $\bar{x}$ = 732/138 = 5'304.

- CUANDO LA VARIABLE ES CONTINUA Y LOS DATOS APARECEN AGRUPADOS: Se procede igual que en el caso de la variable discreta, pero tomando como x_i la marca de clase del correspondiente intervalo de clase.

6.2. MODA

La **moda** de una distribución estadística, es el valor x_i de la variable que presenta mayor frecuencia. Se simboliza por M_o.

EJEMPLO

x_i	f_i
1	15
3	23
5	45
7	36
9	19

Por tanto, Mo = 5

Cuando la variable es continua y los datos están agrupados en intervalos, al intervalo que presente la frecuencia más alta le llamaremos **clase modal.** Se puede considerar como moda su marca de clase

EJEMPLO

Intervalo de clase	f_i
[0, 5)	40
[5, 10)	63
[10, 15)	85
[15,20)	26

La moda se va a encontrar en el intervalo [10, 15). A este intervalo, le llamamos **clase modal**.

6.3. MEDIANA

Una vez ordenados los datos de menor a mayor, la **mediana** es un valor de la variable tal que existen tantos datos inferiores a él como superiores. Se denota por Me.

EJEMPLO

Dados los datos 6, 7, 7, 7, 8, 9, 10, 12, 15 (9 datos), la Me = 8, pues deja 4 datos a su izquierda y otros 4 a su derecha.

Si el número de datos es par, la mediana es el valor medio de los dos centrales.

EJEMPLO

7, 7, 7, 8, 9, 10, 12, 15 (8 datos) entonces la Me = $\frac{8+9}{2}$ = 8’5.

Cuando disponemos de datos agrupados en una tabla de frecuencias, para calcular la mediana, se usa la frecuencia acumulada. Así, la Me es el primer valor cuya frecuencia absoluta acumulada es mayor que N/2

EJEMPLO

En la distribución de frecuencias que tenemos al margen, obtenemos:

Nº de hijos x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	18	22
2	41	63
3	32	95
4	11	106
5	3	109
6	1	110

$\frac{N}{2} = 55$. Entonces la primera F_i > que 55 es 63, luego la Me = 2

7. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Para medir lo agrupados que están los datos utilizamos las medidas de dispersión. Las medidas de dispersión son números que nos informan de cuánto se separan los datos.

Las que vamos a estudiar son: el recorrido, la varianza y la desviación típica.

7.1. RECORRIDO

Es la diferencia entre el valor mayor y el menor de una variable.

$$Re = X_n - X_1$$

Cuanto mayor o menor es el recorrido diremos que se trata de una distribución más dispersa o más concentrada respectivamente.

EJEMPLO

Dada la distribución: 2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 10, el recorrido será la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de dicha distribución, es decir, Re = 10 – 2 = 8.

7.2. VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

La **varianza** es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media. Se denota por Var o σ^2.

La varianza se calcula mediante la fórmula:

$$\text{Var} = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad \text{o bien Var} = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se denota por σ . Su fórmula es:

$$\sigma = \sqrt{Var}$$

EJEMPLO

En la siguiente distribución, calcula la varianza y la desviación típica:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	15	15	15
3	23	69	207
5	45	225	1125
7	36	252	1764
9	19	171	1539
	138	732	4650

$$\bar{x} = \frac{732}{138} = 5`304 \qquad \text{Var} = \frac{4650}{138} - (5'304)^2 = 5'56$$

$$\sigma = \sqrt{5'56} = 2`36.$$

8. COEFICIENTE DE VARIACIÓN

El **coeficiente de variación** se utiliza para comparar dos poblaciones heterogéneas, y se define así:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

EJEMPLO

Estudiado el peso en un conjunto de alumno/as se obtuvo

	$\bar{x}$	σ	CV	Cv en %
Alumnos	68.5	4.4	0.06	6
Alumnas	51.5	4.2	0.08	8

Aunque la dispersión en el peso de los alumnos es mayor que en las alumnas, como el peso medio de las alumnas es menor, la dispersión relativa (en relación al peso) es mayor para las alumnas que para los alumnos.

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

1. Al contar el número de asignaturas suspendidas por cada alumno/a en la primera evaluación de un grupo de 3º de la ESO, hemos obtenido estos datos:

1	1	2	3	2	6	0	0	1	0	4	5	0	0	0
3	2	1	3	1	1	1	0	1	2	0	0	5	4	2

a) Haz una tabla de frecuencias
b) Calcula:

i) Estudiantes que no suspendieron ninguna asignatura.

ii) Porcentaje de estudiantes que suspendieron una o dos asignaturas.

iii) Estudiantes que suspendieron tres o más asignaturas.

2. Supongamos que hemos preguntado a los 30 alumnos de una clase su edad obteniéndose las siguientes respuestas:

19, 20, 18, 18, 21, 23, 19, 22, 19, 18,
20, 18, 21, 19, 18, 25, 20, 21, 20, 23,
18, 22, 19, 19, 24, 22, 24, 19, 20, 19.

a) ¿Qué variable estamos estudiando?, ¿y de qué tipo es?
b) Construye la tabla de frecuencias.
c) ¿Cuántos alumnos superan los 22 años?
d) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene igual o menos de 21 años?

3. En un hospital, 20 recién nacidos han registrado los siguientes pesos (en Kg):

3’15, 2’65, 3’52, 3’41, 2’89, 3’42, 4’21, 3’91, 4’52, 4’30,
2’78, 3’64, 3’77, 3’92, 2’46, 3’22, 4’11, 3’52, 3’14, 2’85.

a) ¿Qué tipo de variable es?
b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos.
c) Representa los datos mediante un histograma.

4. La longitud en cm de 18 grillos es:

1,8 1,9 2 2,4 2,6 2,8 1,7 1,9 2,3
1,6 2,1 3 2,3 2,7 2,9 1,5 1,8 2,6

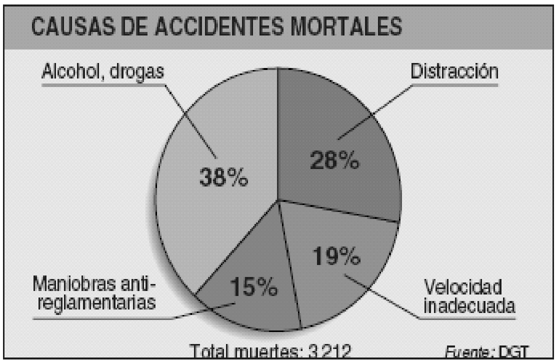
a) Construye la tabla de frecuencias tomando intervalos.
b) Representa los datos mediante un histograma.
c) Calcula las medidas de centralización.
d) Calcula las medidas de dispersión.

5. En un club infantil necesitan clasificar a los niños por estaturas; una vez medidos, tenemos la siguiente tabla:

Estaturas	[140-144)	[144-149)	[149-153)	[153-157)	[157-161)
Número de chicos	1	3	5	8	15

a) Representa los datos mediante un histograma.
b) Calcula las medidas de centralización.
c) Calcula las medidas de dispersión.

6. Un diario publicó esta información:



a) ¿Cuántas personas murieron en accidentes cuya causa fue el alcohol o las drogas?

b) El 75% de las distracciones son fruto de la euforia o de la lentitud de reflejos que producen el alcohol y otras drogas. Según esto, ¿qué porcentaje de accidentes está relacionado con el alcohol y las drogas?

7. En un observatorio meteorológico de una ciudad tenemos las siguientes temperaturas máximas en el mes de diciembre:

12, 3, 4, 10, 11, 12, 4, 5, 5, 6,
8, 2, 5, 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13,
12, 6, 9, 9, 6, 7, 8, 10, 10, 8, 8.

a) Construye la tabla de frecuencias.
b) Representa los datos mediante un polígono de frecuencias.
c) Calcula las medidas de centralización.
d) Calcula las medidas de dispersión.

8. El número que calzan los distintos alumnos de una clase viene dado por la siguiente tabla:

Número de calzado	36	37	38	39	40	41	42	43
Número de alumnos	4	9	4	2	1	3	9	2

a) Representa los datos mediante un polígono de frecuencias.
b) Calcula las medidas de centralización.
c) Calcula las medidas de dispersión.

9. Lanzado un dado 50 veces, se ha obtenido la siguiente distribución:
Halla:

x_i	f_i
1	6
2	11
3	6
4	7
5	9
6	11

a) La media, la moda, la mediana,
b) El recorrido, la varianza y la desviación típica.

10. Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 60 000 € Y una desviación típica de 7500 €. En otra empresa más pequeña B, la media es 9000 € Y la desviación típica, 1 500 €. Calcula, mediante el coeficiente de variación, cuál de los dos tiene más variación relativa.

11. Al preguntar a 20 personas sobre las veces que habían viajado al extranjero, el resultado fue:

3 5 4 4 2 3 3 3 5 2
6 1 2 3 3 6 5 4 4 3

a) Obtén la tabla de todas las frecuencias y realiza un diagrama de barras.
b) Calcula las medidas de centralización y dispersión.

12. Las estaturas, en cm, de 27 jóvenes son:

155 178 170 165 173 168 160 166 176
169 158 170 179 161 164 156 170 171
167 151 163 158 164 174 176 164 154

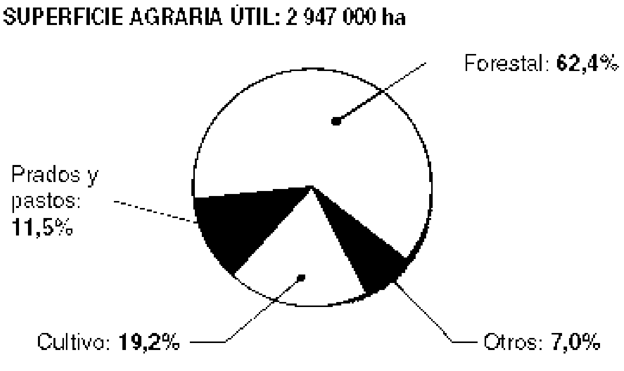
a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 5, comenzando en 150, y construye la tabla de frecuencias y el histograma.
b) Calcula las medidas de centralización y dispersión.

13. El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3 4 3 5 5 1 1 1 1 2 3 4 5 0 2
0 3 2 2 1 2 1 3 2 0 1 2 1 4 3

a) Construye la tabla de frecuencias
b) ¿Cuántos alumnos estudian 3 horas o menos? ¿Y 4 horas o más? Expresa también los resultados en tanto por ciento
c) Calcula las medidas de centralización y dispersión.

14. Este gráfico muestra la distribución de la tierra en Galicia:



a) ¿Cuántas hectáreas ocupan los bosques?
b) De la superficie cultivada, el 23,5% se dedica al maíz. ¿Cuántas hectáreas ocupa el maíz?
c) Representa la distribución de la tierra en la Comunidad de Murcia y compárala con la de Galicia.

SUPERFICIE AGRARIA ÚTIL	CULTIVOS	FORESTAL	PRADOS Y PASTOS	OTROS
1131000 ha	53,4%	26,5%	1,9%	18,2%

15. Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad, y los resultados fueron estos:

RESPUESTAS	%
Todos los días	37,3
Una vez por semana	29
Una vez al mes	10,5
Alguna vez al año	12
Nunca	
No contesta	0,4

a) ¿Qué tanto por ciento de personas respondieron "nunca"?
b) Si las personas que no contestaron fueron 6 ¿cuántas personas fueron encuestadas?
c) Las personas encuestadas, ¿son muestra o población?

16. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Elena o a María. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento, fueron estos:

ELENA	18	23	22	24	19	25	16
MARÍA	18	20	26	20	22	20	28

a) ¿Cuál de las dos tiene mejor media?
b) Calcula la desviación típica. ¿Cuál de las dos es más regular?

17. En la familia Gómez, el salario mensual del padre es 900 € y el salario de la madre, 1500 €. En la familia Pérez, el padre gana 1 860 € y la madre, 540 €.
a) ¿Cuál es el sueldo medio de cada familia?
b) ¿En cuál de ellas es mayor la dispersión?

18. El número de móviles que hay en los hogares de un grupo de personas viene dado en esta tabla:

Nº DE MÓVILES	0	1	2	3	4	5
Nº DE VIVIENDAS	3	19	18	6	3	1

a) Calcula la media y la desviación típica.
b) ¿Cuál es la mediana?
c) ¿Cuántos móviles y cuántas viviendas hay en esa muestra?

19. De una encuesta sobre la labor de un alcalde, se obtuvieron los siguientes datos:

Muy mala 22 Mala 27 Aceptable 17 Buena 19 Muy buena 15

a) ¿Qué porcentaje opina que la labor ha sido mala o muy mala?
b) ¿Qué porcentaje aprueba la labor del alcalde?
c) Halla la moda y la mediana y di cuál de esos dos parámetros te parece que representa mejor la opinión de la mayoría.

20. Hemos encuestado a 3820 personas para saber la audiencia de un debate (D) y de una película (P) que se emitieron en horas distintas en una cadena de Tv.

	VIERON D	NO VIERON D	TOTALES
VIERON P			2712
NO VIERON P		1041	
TOTALES	1187		3820

a) Una tabla de este tipo se llama "de contingencia". Completa la tabla.
b) ¿Qué porcentaje vio la película y el debate?
c) De los que vieron la película, ¿qué porcentaje no vio el debate?

21. Se ha pasado una prueba de 25 preguntas a los 120 estudiantes de un centro escolar. De ellos, el 10% respondió correctamente a 5 preguntas, el 45% acertó 15, el 25% acertó 20, y el resto contestó correctamente a todas las preguntas. Calcula la media y la desviación típica.

22. Los siguientes datos: 10, 17, a, 19, 21, b, 25, tiene como media, mediana y moda 19. ¿Cuánto valen a y b?

23. La media de 6 números es 5’8 y la media de otros 9 números es 6’5. ¿Cuál es la media de los 15 números?

24. La duración (en minutos) de 40 llamadas elegidas al azar fue:

Duración	[2 , 2’5)	[2’5 , 3)	[3 , 3’5)	[3’5 , 4)	[4 , 4’5)
f_i	7	9	f_3	f_4	f_5

a) Sabiendo que $f_3 = 2f_4 = 2f_5$, obtén la duración media de las llamadas, la mediana y la moda.
b) Determina la desviación típica de la duración de las llamadas.
c) Representa los datos.

25. Se ha hecho un mismo examen a dos clases. Los resultados fueron estos:

	$\bar{x}$	σ
CLASE A	5,8	2,9
CLASE B	6,3	1,2

Si hay una clase con 6 sobresalientes y 8 suspensos y otra con 2 suspensos y 3 sobresalientes, ¿cuál es la clase que tiene más sobresalientes?

26. Para hallar la nota de una evaluación, se hace la media de cuatro exámenes. Si en los tres primeros tengo una media de 4,2, ¿qué nota tengo que sacar en el último para aprobar?

27. Para hallar la nota de una asignatura, el segundo examen vale el doble que el primero, y el tercero, el triple. ¿Cuál es la nota de una alumna que sacó un 5, un 6 y un 4? ¿Y si esas notas son el 10%, el 40% y el 50% de la nota final?

28. Los siguientes valores representan los pesos de una serie de personas:

63 75 80 89 65 74 72 69 82 91 96 105 67 82 86 87 78 65
94 93 94 78 76 106 100 70 84 82 76 84 94 102 68 64 82

a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 10, halla las marcas de clase y realiza una tabla estadística con los datos.
b) Calcula la media, mediana, moda, varianza y desviación típica.
c) Realiza el diagrama de barras de los datos y el polígono de frecuencias.

29. Estudiamos el número de televisores que hay en cada vivienda y obtenemos los siguientes datos:

1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2,
1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 4, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2

a) Construye la tabla de frecuencias
b) Calcula la media, moda y mediana
c) Calcula la varianza, desviación típica y coeficiente de variación.

30. Durante el mes de Julio, en una determinada ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas:

32, 31, 28, 29, 29, 33, 32, 31, 30, 31, 31, 27, 29, 29, 30, 32
31, 31, 30, 30, 29, 29, 30, 30, 31, 30, 31, 34, 33, 33, 29.

a) Elabora una tabla de frecuencias y representa la distribución mediante un diagrama de barras.
b) Halla la moda, media y mediana.
c) Halla la varianza y la desviación típica.

31. Dos jugadores de baloncesto A y B consiguen encestar tiros de tres puntos por partido según la distribución siguiente:

Encestes	1	2	3	4	5
Jugador A	1	3	13	2	1
Jugador B	8	1	0	1	10

a) Calcular el coeficiente de variación de cada uno de los jugadores.
b) Comparar ambos, interpretando el resultado.

32.
a) Rellenar la siguiente tabla estadística:

Variable x	1	2	3	4	5	6	7	8
Frec. Absoluta	4	4		7	5		7	
Frec. Abs. Acum.			16		28	38	45	
Frec. Relativa	0,08		0,16	0,14				

b) Calcular las medidas de centralización.

TEMA 8: PROBABILIDAD

1. INTRODUCCIÓN.

Cuando un caballero andante, como el ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha, llegaba a un cruce de caminos, y no tenía predilección por ninguna de las posibles direcciones, dejaba sueltas las riendas de Rocinante y era el caballo quién, al azar, elegía el camino por el que seguirían sus aventuras.

Pues bien, esto es un experimento aleatorio, y la elección del camino, un suceso.

Si complicado es el estudio de cualquier situación desde un punto de vista matemático, tanto más será el estudio de experimentos en los que pueden ocurrir muchas cosas, y no sabemos de antemano cuál de ellas va a ocurrir.

Del estudio de experimentos con el lanzamiento de un dado o de la extracción de una carta de una baraja, se encarga la probabilidad. Y continuamente hacemos uso de ella en nuestra vida cotidiana cuando decimos cosas como “*¡Es muy difícil que me toque la lotería!*”, o “*¡Esta tarde llueve seguro!*”. Lo que realmente queremos decir es que la probabilidad de que nos toque la lotería es muy baja, o que la probabilidad de que llueva es muy alta, más aún cuando todos sabemos que, a pesar de todo, la lotería nos puede tocar, y que es posible que esta tarde no llueva.

En este tema nos aproximaremos al estudio de los experimentos aleatorios, aprenderemos a asignar probabilidades a cada uno de los caminos que pudo elegir Rocinante y a reconocer las características y relaciones fundamentales de los diferentes tipos de sucesos.

2. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La Probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia ciertos experimentos llamados aleatorios, o sea, regidos por el azar, en que se conocen todos los resultados posibles, pero no es posible tener certeza de cuál será en particular el resultado del experimento.

La probabilidad mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, bajo condiciones *suficientemente* estables.

Experimentos deterministas

Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen.

Ejemplo Si dejamos caer una piedra desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la piedra bajará. Si la arrojamos hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo; pero después bajará.

Experimentos aleatorios

Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del **azar**.

Ejemplos

- Si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz.
- Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.

Actividad 1

Distingue el tipo de experimento que corresponde a cada uno de los siguientes:

a) Lanzamos un dado común y anotamos el resultado.

b) Llenamos una botella con agua y, sin cerrarla la ponemos boca abajo, anotando lo que le ocurre al agua.

c) Lanzamos una pelota hacia arriba y anotamos si vuelve a caer o no.

d) lanzamos una pelota a una canasta de baloncesto desde la línea de tiros libres y anotamos si hemos encestado o no.

3. TEORÍA DE PROBABILIDADES

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro. Con este fin, introduciremos algunas definiciones:

- **Suceso**

  Es cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria.

  Al lanzar una moneda salga cara.

  Al lanzar un dado se obtenga 4.

- **Espacio muestral**

  Es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, lo representaremos por E (o bien por la letra griega Ω).

  Espacio muestral de una moneda: E = {C, X}.

  Espacio muestral de un dado: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

- **Suceso aleatorio**

  Es cualquier subconjunto del espacio muestral.

  Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3, y otro, sacar 5.

Ejemplo: Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral.

E = {(b,b,b);(b,b,n);(b,n,b);(n,b,b);(b,n,n);(n,b,n);(n,n,b);(n,n,n)}

2. El suceso A = {extraer tres bolas del mismo color}.

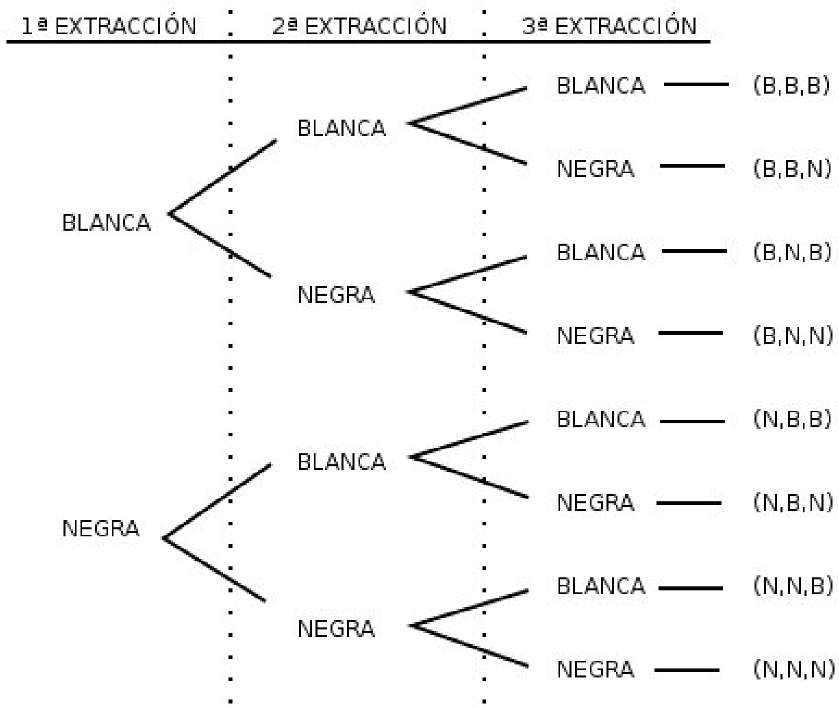
A = {(b, b, b); (n, n, n)}

3. El suceso B = {extraer al menos una bola blanca}.

B= {(b, b, b); (b, b, n); (b, n, b); (n, b, b); (b, n, n); (n, b, n); (n, n, b)}

4. El suceso C = {extraer una sola bola negra}.

C = {(b, b, n); (b, n, b); (n, b, b)}



Actividad 2
En una urna hay 2 bolas blancas y 3 negras. Escribe el espacio muestral asociado a los experimentos: a) extraer una bola, b) extraer dos bolas.

4. TIPOS DE SUCESOS

- **Suceso elemental** es cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso elemental es sacar 5.

- **Suceso compuesto** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3.

- **Suceso seguro** E, está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

Por ejemplo al tirar un dado un dado obtener una puntuación que sea menor que 7.

- **Suceso imposible** $\varnothing$, es el que no tiene ningún elemento**.**

Por ejemplo al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7.

- **Sucesos compatibles** Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

- **Sucesos incompatibles** Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común.

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

- **Sucesos independientes** Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.
  Al lazar dos dados los resultados son independientes.
- **Sucesos dependientes** Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.
  Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición, son sucesos dependientes.
- **Suceso contrario** El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A. Se denota por $\bar{A}$.
  Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

Actividad 3

1. De una baraja española de 40 cartas extraemos una carta, indica si en cada uno de los apartados siguientes aparecen sucesos compatibles o no:
   a) A= {Salir una figura}, B= {Salir un oro}
   b) A= {Salir el as de bastos}, B= {Salir el as de copas}
   c) A= {Salir una copa}, B= {Salir el siete de copas}

2. En el experimento de lanzar un dado y anotar su resultado, escribe el suceso contrario a:
   A = {Sacar un número par menor que 5}; *B = {1, 2, 6}; C = {3}*

5. ESPACIO DE SUCESOS

Espacio de sucesos, S, es el conjunto de todos los sucesos aleatorios.

Si E tiene un número finito de elementos, n, el **número de sucesos** de E es a^n. Siendo a el número de sucesos probables cuando tenemos un único elemento.

Ejemplos

Una moneda E= {C, X}. Número de sucesos = 2^1 =2

Dos monedas E= {(C, C); (C, X); (X, C); (X, X)}.
Nº de sucesos = 2^2 =4

Tres monedas E= {(C,C,C); (C,X,C); (X,C,C); (X,X,C); (C,C,X); (C,X,X); (X,C,X); (X,X,X)}.
Número de sucesos = 2^3 =8

Un dado E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Número de sucesos = 6^1 = 6

Dos dados E = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)....} Número de sucesos = 6^2= 36

Tres dados: Número de sucesos = 6^3 = 216

Actividad 4

Escribe el espacio de sucesos asociado a la extracción de dos bolas de una urna que tiene una bola roja y dos bolas blancas.

6. UNIÓN DE SUCESOS

La **unión de sucesos, A$\cup$ B**, es el suceso formado por todos los elementos de A y de B.

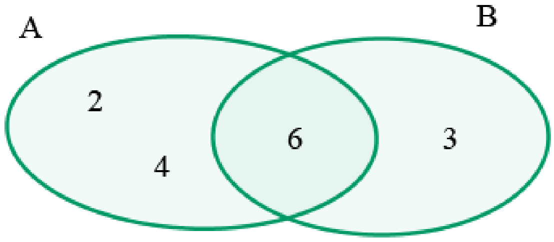
Es decir, el suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos. $A \cup B$ se lee como "**A o B**".

Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular $A \cup B$ será “sacar par **o** múltiplo de 3”

A = {2, 4, 6}   B = {3, 6}

$A \cup B$ = {2, 3, 4, 6}



Propiedades de la unión de sucesos

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotente	$A \cup A = A$
Simplificación	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Elemento neutro	$A \cup \varnothing = A$
Absorción	$A \cup E = E$

Actividad 5

De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Escribe un resultado posible sabiendo que se verifica el suceso:

a) {Salir 3 de bastos} U {Salir caballo} U {Salir as}
b) {Salir copa} U {Salir tres}

7. INTERSECCIÓN DE SUCESOS

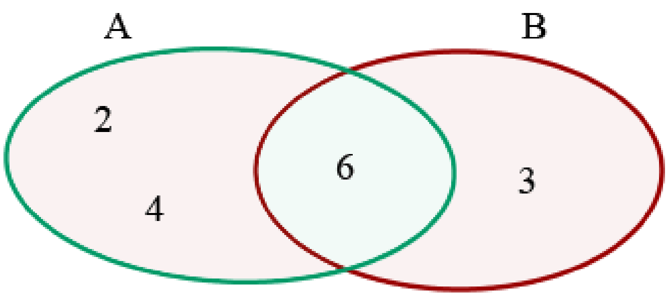
La **intersección de sucesos, A$\cap$B**, es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B.

Es decir, el suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B. $A \cap B$ se lee como "**A y B**".

Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular $A \cap B$ será “sacar par **y** múltiplo de 3”.

A={2, 4, 6} B={3, 6}; $A \cap B$ = {6}



Propiedades de la intersección de sucesos

Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotente	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro	$A \cap E = A$
Absorción	$A \cap \varnothing = \varnothing$

Actividad 6

1. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Escribe un resultado posible sabiendo que se verifica el suceso:

a) {Salir bastos} ∩ {Salir caballo}

b) {Salir copa} ∩ ({Salir tres} U {Salir un cinco}

8. DIFERENCIA DE SUCESOS

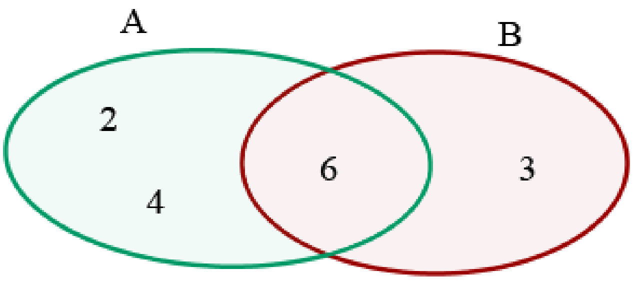
La **diferencia de sucesos, A − B**, es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

Es decir, la **diferencia de los sucesos** A y B se verifica cuando lo hace A y no B.

A − B se lee como "**A menos B**".

Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A="sacar par" y B="sacar múltiplo de 3". Calcular A − B.



A={2, 4, 6} B={3, 6} A−B={2, 4}

Propiedad $A - B = A \cap \overline{B}$

Actividad 7

De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Escribe un resultado posible sabiendo que se verifica el suceso:

a) {Salir bastos} - {Salir caballo}

b) {Salir copa} - {Salir una figura}

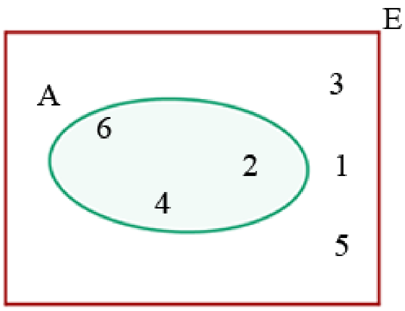
9. SUCESOS CONTRARIOS O COMPLEMENTARIOS

El suceso $\overline{A}$ **= E - A** se llama **suceso contrario** o complementario de A.

Es decir, se verifica siempre y cuando no se verifique A.

Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par". Calcular $\overline{A}$. A = {2, 4, 6} $\overline{A}$ = {1, 3, 5}



Propiedades

$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$ $\overline{E} = \varnothing$ $\overline{\varnothing} = E$ $A \cup \overline{A} = E$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

10.-LEYES DE MORGAN

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

11.-AXIOMAS Y PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

Axiomas de la probabilidad

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.

0 ≤ p(A) ≤ 1

2. La probabilidad del suceso seguro es 1. **p(E) = 1**

3. Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \varnothing$ entonces:

P ($A \cup B$) = p(A) + p(B)

Propiedades de la probabilidad

1 La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

2 Probabilidad del suceso imposible es cero. $p(\varnothing) = 0$

3 La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Actividad 8

En una baraja española de 40 cartas, sean los sucesos: A = {Salir una figura}, B = {Salir un oro} y C = {Salir un As }.

Sabemos que: P(A)= 0’3, P(B)=0’25, P(C)=0’1, P(A∩B)=0'075, P(A∩C)=0 y P(B∩C)=0’025.

Si extraemos una carta, calcula:

a) P({Salir una figura} U {Salir un As})

b) P({Salir una figura} U {Salir un oro})

c) P({Salir un As} U {Salir un oro})

12. REGLA DE LAPLACE

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplos

1. Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras:

   Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}. Casos favorables: 1.

   $$P(2\ caras) = \frac{1}{4}$$

2. En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

   Casos posibles: 40. Casos favorables de ases: 4.

   $$P(as) = \frac{1}{40}$$

   Casos favorables de copas: 10.

   $$P(copas) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

3. Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

- Un número par:

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Un múltiplo de tres. Casos favorables: {3, 6}.

$$P(\dot{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Mayor que 4. Casos favorables: {5, 6}.

$$P(>4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

13. PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE SUCESOS

- Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles: La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles, es decir tales que A∩B = ∅, es la suma de las probabilidades.

p(A∪B) = p(A) + p(B)

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Probabilidad de la unión de sucesos compatibles: La probabilidad de la unión de sucesos compatibles, es decir tales que $A \cap B \neq \varnothing$, es la suma de las probabilidades menos la probabilidad del suceso intersección:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- Además la probabilidad de la unión de tres sucesos es:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(\dot{2} \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Actividad 9

1. Lanzamos dos dados y sumamos sus resultados. Dados los sucesos
   A = {salir más de 5}, B = {salir un número par} y C = {salir 2},

Determina:

a) P(AUB) b) P(B) c) P(C) d) P(AUB) e) P(BUC) f) P(AUC) g)P(AUBUC)

2. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta, dados los sucesos

   A = {Salir una figura}, B = {Salir un tres} y C = {Salir la sota de oros}.

Calcula:

a) P(AUB) b) P(AUC) c) P(AUBUC)

14. PROBABILIDAD COMPUESTA O DE LA INTERSECCIÓN DE SUCESOS

Probabilidad de la intersección de **sucesos independientes**

$P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Ejemplo: Se tiene una baraja de 40 cartas, se saca una y se vuelve a meter. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A \cap B) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

Ejemplo: Se tiene una baraja de 40 cartas, se extraen dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos ases?

$$p(A \cap B) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

15. TABLAS DE CONTINGENCIA

Un método útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante las **tablas de contingencia**.

Se trata de tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras de la tabla.

Ejemplo

Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
CASADOS		45	80
SOLTEROS			
TOTAL		65	120

1 ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

2 Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
CASADOS	35	45	80
SOLTEROS	20	20	40
TOTAL	55	65	120

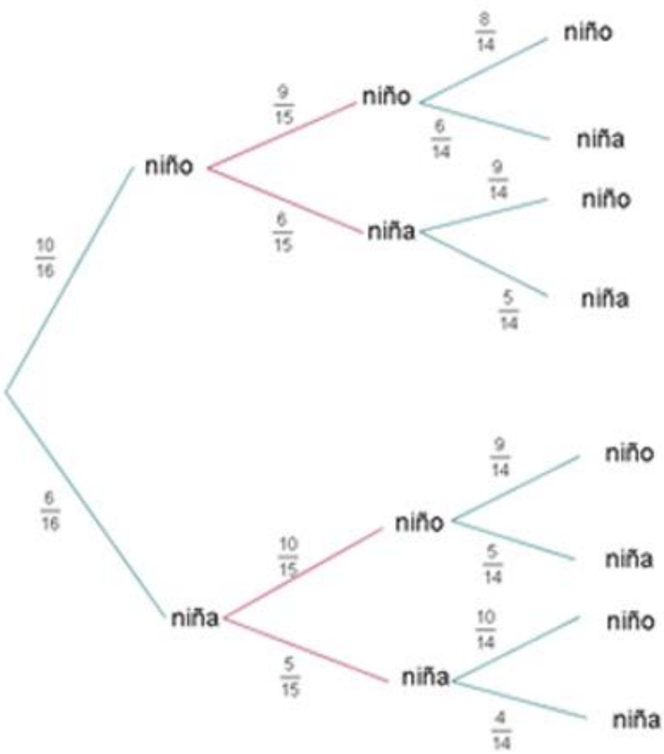
$$p(\text{hombre soltero}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \qquad p(\text{mujer / casado}) = \frac{45}{80} = 0.5625$$

16. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Para la construcción de un **diagrama en árbol** se partirá poniendo una **rama** para cada una de las **posibilidades**, acompañada de su **probabilidad**.

En el **final** de cada **rama parcial** se constituye a su vez, un **nudo** del cual parten nuevas **ramas**, según las **posibilidades** del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (**nudo final**).

Hay que tener en cuenta: que la **suma de probabilidades** de las **ramas** de cada **nudo** ha de dar **1**.



Ejemplos

A. Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

1 Seleccionar tres niños.

$$p(3\,niños) = \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14} = 0.214$$

2 Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

$$p(2\,niños\ y\ 1\,niña) = \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}+\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14} = 0.482$$

3 Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

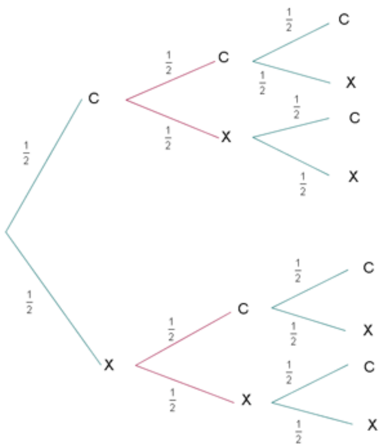
$$p(2\,niñas\ y\ 1\,niño) = \frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{14} = 0.268$$

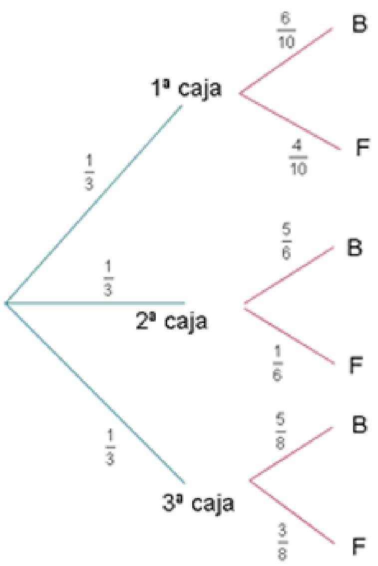
4 Seleccionar tres niñas.

$$p(3\,niñas) = \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14} = 0.0357$$

B. Calcular la **probabilidad** de que al arrojar al aire tres monedas, salgan tres caras.

$$p(3c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$





C. Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene 10 bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?

$$p(fundida) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

10. Extraemos una carta de una de una baraja española. Indica si son compatibles, incompatibles o complementarios cada par de sucesos:
    a) A = Sacar oros y B = Sacar copas.
    b) C = Sacar as y D = No sacar as.
    c) F = Sacar bastos y G = Sacar as.
    d) H = Sacar rey de copas e I = Sacar figura.

11. Extraemos y reemplazamos 50 veces una bola de una urna, que contiene bolas numeradas del 1 al 5. Los resultados son:

Nº	1	2	3	4	5
N(A)	13	9	14	8	6

Para los sucesos A = Múltiplo de 2, B = Número impar y C = número primo, calcula sus frecuencias relativas y las de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$.

12. Al lanzar un dado, calcula la probabilidad de obtener:
    a) Múltiplo de 5
    b) Divisor de 2.
    c) Número primo.
    d) Número 3.
    e) Divisor de 6.
    f) Par y divisor de 4.

13. De una baraja española extraemos una carta. Calcula la probabilidad de:
    a) Sacar un caballo
    b) Sacar una figura
    c) Sacar oros
    d) Sacar una sota que no sea de copas

14. En una caja hay 5 bolas amarillas y 7 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar bola amarilla?

15. Se lanzan dos dados y se suman sus puntos. Halla la probabilidad de que la suma sea:

a) 3 b) Mayor que 10 c) 7 d) 4 ó 5

16. Una urna tiene 4 bolas blancas, 2 rojas y 5 negras. Calcula la probabilidad de sacar una bola:

a) Blanca b) Que no sea negra c) Roja d) Blanca o negra

17. De una caja con 3 bolas azules, 2 rojas y 2 verdes, extraemos una al azar. Halla la probabilidad de que la bola:
a) Sea azul. b) No sea roja. c) No sea roja o azul.

18. Vamos a jugar con un dado, pero sospechamos que es irregular y, antes de comenzar a jugar, lo lanzamos 500 veces y anotamos los resultados. Al final, estimamos que la probabilidad de cada suceso elemental es:

$P(\{1\})=0,26$ $P(\{2\})=0,20$ $P(\{3\})=0,13$
$P(\{4\})=0,15$ $P(\{5\})=0,10$ $P(\{6\})=0,16$

a) ¿Cuál es la probabilidad de "obtener un múltiplo de 3"?
b) ¿Cuál es la probabilidad de "obtener par"? ¿Y de "no obtener par"?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado dos veces, la suma de las puntuaciones sea menor que 12? ¿Y la de que la suma sea 3?

18. Extraes una carta de una baraja española. La miras, la devuelves al montón y haces otra extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que sean dos reyes?

19. Lanzar dos monedas y un dado. Halla la probabilidad de obtener dos caras y un cinco.

20. Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea una REY y la segunda un AS?

21. Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

22. Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de obtener 5 caras y la de obtener alguna cruz.

23. Se extraen, una tras otra, 3 cartas de un baraja, con reemplazamiento (cada vez se vuelve a introducir la carta en el mazo). ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?

24. Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

25. En una urna hay 3 bolas blancas, 5 rojas y 4 negras. Se extraen tres bolas consecutivamente, sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que las tres sean rojas.

26. En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40%. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

27. Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Éste se realiza extrayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo. Hallar la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

28. Una clase está formada por 10 chicos y 10 chicas; la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han elegido francés como asignatura optativa.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea chico o estudie francés?
b) ¿Y la probabilidad de que sea chica y no estudie francés?

29. Un taller sabe que por término medio acuden: por la mañana tres automóviles con problemas eléctricos, ocho con problemas mecánicos y tres con problemas de chapa, y por la tarde dos con problemas eléctricos, tres con problemas mecánicos y uno con problemas de chapa.
a) Hacer una tabla ordenando los datos anteriores.
b) Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.
c) Calcular el porcentaje de los que acuden por problemas mecánicos.
d) Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.

30. Una caja contiene tres monedas. Una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es de $\frac{1}{3}$. Se selecciona una moneda al azar y se lanza al aire. Hallar la probabilidad de que salga cara.

31. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda bola sea verde.
b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

32. En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al fútbol, cuál será la probabilidad de que escogido al azar un alumno de la clase:

a) Juegue sólo al fútbol.
b) Juegue sólo al baloncesto.
c) Practique uno solo de los deportes.
d) No juegue ni al fútbol ni al baloncesto.

33. En una ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?
b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

34. En un aula hay 100 alumnos, de los cuales: 40 son hombres, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?
b) Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

35. Disponemos de dos urnas: la urna A contiene 6 bolas rojas y 4 bolas blancas, la urna B contiene 4 bolas rojas y 8 bolas blancas. Se lanza un dado, si aparece un número menor que 3; nos vamos a la urna A; si el resultado es 3 ó más, nos vamos a la urna B. A continuación extraemos una bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la bola sea roja y de la urna B.
b) Probabilidad de que la bola sea blanca.

36. Se ha realizado una encuesta sociológica acerca de la actitud política progresista o conservadora a 334 universitarios de los que 196 son varones. Un total de 187 han manifestado ser progresistas, de los cuales 42 son mujeres. Se elige al azar un universitario. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Que sea mujer
b) Que tenga una actitud conservadora.
c) Que sea varón y progresista.
d) Que sea conservadora sabiendo que ha sido mujer.

37. Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcular la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:

a) Alumna o que apruebe las matemáticas.
b) Alumno que suspenda las matemáticas.
c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

38. Entre la población de una determinada región se estima que el 55% presenta obesidad, el 20% padece hipertensión y el 15% tiene obesidad y es hipertenso.

a) Calcula la probabilidad de ser hipertenso o tener obesidad.
b) Calcula la probabilidad de tener obesidad sabiendo que es hipertenso.
c) Calcula la probabilidad de ser hipertenso sabiendo que es obeso.

39. En una residencia hay 200 ancianos. De entre ellos, 80 son fumadores y 78 están enfermos de los pulmones. Hay 48 que están enfermos de los pulmones y, además, fuman. Haz una tabla de contingencia y contesta:

a) ¿Cuántos enfermos hay de los pulmones y que no fumen?
b) ¿Cuántos fumadores no están enfermos?
c) Elegida una persona al azar y sabiendo que fuma, ¿cuál es la probabilidad de estar enfermo?
d) Elegida una persona al azar y sabiendo que no está enferma, ¿cuál es la probabilidad de que fume?

40. Se realiza una encuesta a 100 personas sobre su afición al fútbol y de las 56 que expresan que les gusta ese deporte, 48 son hombres. De las que no les gusta el fútbol, 35 son mujeres. Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de:

a) Que sea una mujer aficionada al fútbol.
b) Que sea un hombre al que no le guste el fútbol.
c) Sabiendo que la persona elegida es un hombre, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el fútbol?

41. Se ha preguntado a 100 alumnos de ESO si tienen ordenador en casa. De los 60 alumnos de 3º, 35 no tenían. 45 alumnos sí tienen. Si se elige uno al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Sea de 4º y tenga ordenador.
b) Tenga ordenador, sabiendo que el alumno elegido es de 3º.
c) Sea de 4º, sabiendo que no tiene ordenador.